Journal of Libyan Academy Bani Walid 2025
مجلة الأكاديمية الليبية بني وليد
e-ISSN: 3104-3860
Volume 1, Issue 4, 2025, Pages: 253-270
Website: https://journals.labjournal.ly/index.php/Jlabw/index

Using the fuzzy center method to solve linear fractional fuzzy differential equations of order n with initial conditions

Ambark Ashat *
Department of Mathematics, Faculty Arts and seince Ubari, Sebha University, Libya
*Email: Amb.ashat@sebhau.edu.ly

استخدام طريقة المركز الضبابي لحل المعادلات التفاضلية الضبابية الكسرية الخطية من الرتبة n مع شروط ابتدائية

أمبارك الشاط*
قسم الرياضيات، كلية الآداب والعلوم أوباري، جامعة سبها، ليبيا

Received: 12-09-2025	**Accepted:** 15-11-2025	**Published:** 07-12-2025

Abstract

Fuzzy fractional differential equations (FFDEs) provide a powerful mathematical framework for modeling dynamic systems characterized by uncertainty in data, parameters, and initial conditions. This research aims to develop an analytical methodology for solving linear FFDEs of order n using the Fuzzy Centre Method (FCM). The proposed approach transforms the original fuzzy equation into a classical differential equation through the concept of the fuzzy centre, then applies Laplace transforms for the Caputo fractional derivative to obtain the solution, which is subsequently reconstructed into a complete fuzzy solution.

Three distinct cases of coefficients are considered: all positive, all negative, and mixed signs. Numerical examples demonstrate that the solutions obtained by FCM are in excellent agreement with the exact solutions at r=1, and also closely match results derived from alternative approaches such as the Addition and Subtraction of Fuzzy Numbers Method (ASFM).

The findings confirm that FCM is both reliable and flexible in handling various scenarios, with numerical validation carried out in MATLAB to support its accuracy and computational efficiency. This highlights the method's robustness in addressing fuzzy fractional initial value problems and its ability to provide consistent results across different coefficient structures.

The study concludes that the FCM offers a strong and systematic framework for solving FFDEs and recommends extending its application to nonlinear fuzzy fractional differential equations and multi-variable fuzzy fractional systems. Furthermore, potential applications in engineering, economics, and life sciences are highlighted, where uncertainty is an inherent feature of mathematical modeling.

Keywords: : fuzzy centre -based methods, fuzzy fractional derivatives caputo-type, fuzzy number, fuzzy fractional linear differential equations, mittag-leffler function.

الملخص

تُعَدّ المعادلات التفاضلية الضبابية الكسرية أداة رياضية فعالة لنمذجة الأنظمة الديناميكية التي تتسم بعدم اليقين في البيانات أو المعاملات. ويهدف هذا البحث إلى تطوير منهجية تحليلية لحل المعادلات التفاضلية الضبابية الكسرية الخطية من الرتبة n باستخدام طريقة المركز الضبابي (Fuzzy Centre Method – FCM). تعتمد هذه الطريقة على تحويل المعادلة الضبابية إلى معادلة تقليدية عبر مفهوم المركز الضبابي، ومن ثم إيجاد الحلول باستخدام تحويل لابلاس لمشتقة كابوتو، قبل إعادة بناء الحل الضبابي الكامل.

تم تناول ثلاث حالات للمعاملات: جميعها موجبة، جميعها سالبة، وحالة مختلطة. وقد أظهرت التطبيقات العددية أن الحلول المتحصّل عليها بواسطة طريقة (FCM) تتوافق بدقة مع الحلول المضبوطة (Exact Solutions) عند الحالة r=1 ، كما أنها تتطابق تقريبًا مع نتائج الطرق البديلة مثل طريقة الجمع والطرح الضبابي.(ASFM)

أثبتت النتائج أن منهجية المركز الضبابي تتميز بالمرونة والموثوقية في معالجة مختلف الحالات، كما أنها مدعومة بالحسابات العددية باستخدام برنامج MATLAB مما يعزز مصداقيتها. وتبرز هذه الدراسة كإسهام مهم في توسيع نطاق استخدام الطرق الضبابية الكسرية، حيث توفر إطارًا رياضيًا قويًا لحل مسائل القيمة الابتدائية الضبابية.

وتوصي الدراسة بتطبيق المنهجية المقترحة على المعادلات غير الخطية والأنظمة الضبابية الكسرية متعددة المتغيرات، إضافة إلى استكشاف تطبيقاتها العملية في مجالات الهندسة، الاقتصاد، والعلوم الحيوية، حيث يشكل عدم اليقين عنصرًا رئيسيًا في النمذجة الرياضية.

الكلمات المفتاحية : العدد الضبابي، دالة ميتا ليفلر، طريقة المركز الضبابي، المشتقات الضبابية الكسرية من نوع كابوتو، المعادلة التفاضلية الضبابية الكسرية.

1- المقدمة

تشكل المعادلات التفاضلية الضبابية (Fuzzy Differential Equations) إطارًا رياضيًا متقدمًا وضروريًا لنمذجة الأنظمة الديناميكية التي تتسم بعدم اليقين والغموض في البيانات أو المعاملات أو الشروط الابتدائية[13,1] . لقد تطور هذا المجال بشكل ملحوظ منذ أن قدم لطف الله زاده نظرية المجموعات الضبابية عام 1965 [14]، مما مهد الطريق لمعالجة عدم الدقة في النماذج الرياضية التقليدية.

في السياق ذاته، برزت الحاجة إلى تطوير أساليب تحليلية وعددية قادرة على حل المعادلات التفاضلية الضبابية ذات الرتب العليا، والتي تمثل تحديًا كبيرًا بسبب طبيعتها غير التقليدية وتعقيد عمليات التفاضل والتكامل الضبابي[11] . وقد قدم العديد من الباحثين إسهامات قيمة في هذا المجال، منها على سبيل المثال أعمال بوكلي وفورينج [3] في حل مسائل القيمة الابتدائية الضبابية، وفرينو[1] في حل المعادلات الخطية من الرتبة النونية.

في الأعمال الحديثة، تم اقتراح منهجيات مبتكرة تعتمد على الخصائص الجبرية والهندسية للأعداد الضبابية. على وجه الخصوص، قدم القاضي والشاط[8] طريقة المركز الضبابي (Fuzzy Centre Method) كأداة فعالة لتحويل المعادلة الضبابية إلى نظام معادلات تقليدية. وفي تطور متوازٍ، اقترح الشاط والقاضي وبيت المال[2] طريقة بديلة تعتمد على عمليات الجمع والطرح الجبري للأعداد الضبابية (ASFM) لمعالجة نفس الصنف من المعادلات، مما وسع نطاق الخيارات المتاحة أمام الباحثين.

تهدف هذه الورقة إلى الإسهام في هذا المجال النشط من خلال تقديم دراسة تحليلية تطبق فيها طريقة المركز الضبابي (FCM) لحل المعادلات التفاضلية الضبابية الخطية من الرتبة (n) تحت ثلاث حالات مختلفة لمعاملاتها (موجبة، سالبة، مختلطة). وتعتمد منهجية البحث على تحويل المسألة الضبابية إلى معادلة تقليدية بواسطة المركز الضبابي، يتم حلها بعد ذلك بطرق قياسية، ثم إعادة بناء الحل الضبابي الكامل. وتم التحقق من كفاءة الطريقة ودقتها عبر أمثلة تطبيقية متنوعة، مما يؤكد موثوقية الطريقة المقترحة وكفاءتها الحسابية.

تم تنظيم هذه الورقة كما يلي: يقدم القسم الثاني المفاهيم الأساسية والأطر النظرية. بينما يعرض القسم الثالث الصياغة الرياضية لطريقة المركز الضبابي للمعادلات من الرتبة (n). ويوضح القسم الرابع التطبيقات العددية والأمثلة. وأخيرًا، تقدم القسم الخامس النتائج والمناقشة والتوصيات.

2. مفاهيم اساسية

تعريف1: الفترة Interval [4]

الفترة $\tilde{x}$ المعرفة ب $[\underline{x}, \overline{x}]$ على مجموعة الأعداد الحقيقية تعطى بـ

$$\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in R: \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\} \qquad (1)$$

سنتناول فقط الفترة المغلقة في هذا البحث.

لتكن لدينا فترتين $\tilde{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$ ، $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ يقال بأن هاتين الفترتين متساويتين إذا كانت في نفس المجموعة، من الناحية الرياضية هذا يحدث فقط عندما تكون نقاط النهاية متساوية، وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$\tilde{x} = \tilde{y} \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}, \overline{x} = \overline{y} \qquad (2)$$

بالنسبة للفترتين $\tilde{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$ ، $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ يتم تعريف العمليات الحسابية على الفترات مثل الجمع والطرح والضرب والقسمة كالتالي:

$$\tilde{x} + \tilde{y} = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}] \qquad (3)$$

$$\tilde{x} - \tilde{y} = [\underline{x} - \underline{y}, \overline{x} - \overline{y}] \qquad (4)$$

$$\tilde{x} \times \tilde{y} = [\min S ، \max S]\text{, where } S$$

$$= \{\underline{x} \times \underline{y}, \underline{x} \times \overline{y}, \overline{x} \times \underline{y}, \overline{x} \times \overline{y}\}, \qquad (5)$$

$$\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} = [\underline{x}, \overline{x}] \times \left[\frac{1}{\overline{y}}, \frac{1}{\underline{y}}\right] \text{ if } 0 \notin \tilde{y} \qquad (6)$$

الآن إذا كان K عدداً حقيقياً و $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ فإن حاصل ضربهما يعطى ب

$$k\tilde{x} = \begin{cases} [k\overline{x}, k\underline{x}], & K < 0 \\ [k\underline{x}, k\overline{x}], & K \geq 0 \end{cases} \qquad (7)$$

تعريف2: العدد الضبابي Fuzzy Number [11]

العدد الضبابي $\tilde{U}$ يكون مجموعة ضبابية محدبة $\tilde{U}$ من خط الأعداد الحقيقية R بحيث:

$$\{\mu_{\tilde{U}}(x): R \to [0,1], \forall x \in R\},$$

بحيث $\mu_{\widetilde{U}}$ تسمى دالة الانتماء للمجموعة الضبابية، وهي مستمرة جزئياً.

وهناك مجموعة متنوعة من الأعداد الضبابية ولكن في هذه الدراسة نستخدم فقط الأعداد الضبابية، المثلثية وشبة المنحرف والجاوسي.

تعريف3: العدد الضبابي المثلثي Triangular Fuzzy Number

العدد الضبابي المثلثي (TFN) $\widetilde{U}$ هو مجموعة ضبابية محددة $\widetilde{U}$ من خط الاعداد الحقيقية R بحيث:

1. يوجد تحديداً عنصراً واحداً $x_0 \in R$ مع $\mu_{\widetilde{U}}(x_0) = 1$

(x_0 تسمى القيمة المتوسطة من $\widetilde{U}$) حيث $\mu_{\widetilde{U}}$ دالة الانتماء للمجموعة الضبابية.

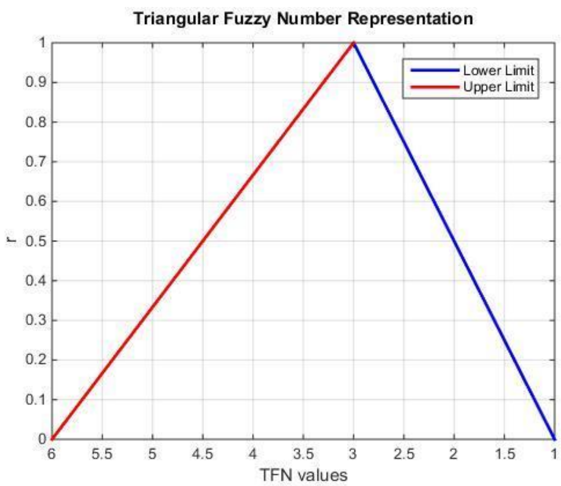
2. $\mu_{\widetilde{U}}(x)$ متصلة جزئياً.

لنعتبر العدد الضبابي المثلثي (TFN) $\widetilde{U} = (a, b, c)$. دالة الانتماء $\mu_{\widetilde{U}}$ لـ $\widetilde{U}$ تعرف كالتالي:

$$\mu_{\widetilde{U}}(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b \le x \le c \\ 0, & x \ge c \end{cases}$$

العدد الضبابي المثلثي (TFN) $\widetilde{U} = (a, b, c)$ يمكن تمثيله بأزواج مرتبة من الدوال من خلال:

$$r - approach: [\underline{u}(r), \overline{u}(r)] = [(b-a)r + a, -(c-b)r + c], where \quad r \in [0,1]$$



شكل 1يبين العدد الضبابي المثلثي

تعريف4: العدد الضبابي شبه المنحرف Trapezoidal Fuzzy Number

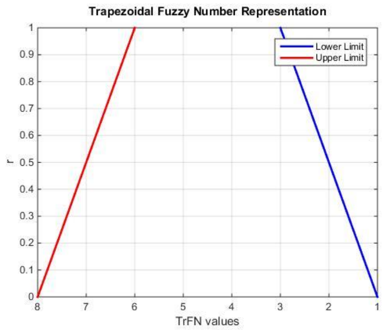
لنعتبر العدد الضبابي شبه المنحرف $\tilde{U} = (a,b,c,d)$ (TrFN) .

دالة الانتماء $\mu_{\tilde{U}}$ لـ $\tilde{U}$ تعرف كالتالي:

$$\mu_{\tilde{U}}(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c \le x \le d \\ 0, & x \ge d \end{cases}$$

العدد الضبابي شبة المنحرف $(TrFN)$ $\tilde{U} = (a,b,c,d)$ يمكن تمثيله بأزواج مرتبة من الدوال من خلال:

$$r - cut\ approach{:}\left[\underline{u}(r), \overline{u}(r)\right] = [(b-a)r + a, -(d-c)r + d], where\ \ r \in [0,1]$$



شكل 2: يبين العدد الضبابي شبه المنحرف

تعريف5: العدد الضبابي الجاوسي Gaussian Fuzzy Number [4]

لنعتبر العدد الضبابي الجاوسي (GFN) $\tilde{U} = (\delta, \sigma_l, \sigma_r)$.

دالة الانتماء $\mu_{\tilde{U}}$ لـ $\tilde{U}$ تعرف كالتالي:

$$\mu_{\tilde{U}}(x) = \begin{cases} exp[-(x-\delta)^2/2{\sigma_l}^2 & for \quad x \le \delta] \\ exp[-(x-\delta)^2/2{\sigma_r}^2 & for \quad x \ge \delta] \end{cases} \qquad \forall x \in R$$

عندما قيمة النموذج تعطى بـ δ و σ_l، σ_r يشير إلى الطرف الايمن والأيسر الضبابي المقابل لتوزيع جاوس. بالنسبة للعدد الضبابي الجاوسي المتماثل فإن الطرف الأيمن والأيسر متساويان، أي أن $\sigma_l = \sigma_r = \sigma$

لذلك يمكن كتابة (GFN) *العدد الضبابي الجاوسي المتماثل بالشكل* $\tilde{U} = (\delta, \sigma_l, \sigma_r)$ ودالة الانتماء المقابلة تعرف كالتالي:

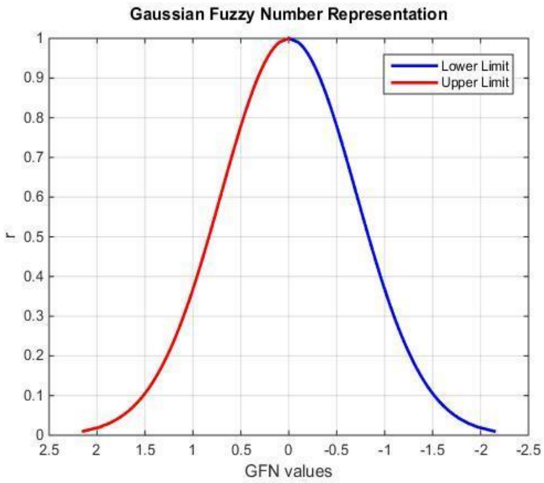
$$\mu_{\tilde{U}}(x) = exp\{-\beta(x-\delta)^2\} \qquad \forall x \in R$$

عندما $\lambda = 1/2\sigma^2$.

يمكن تمثيل (GFN) المتماثل في الصورة البارا مترية على النحو التالي:

$$\widetilde{U} = [\underline{u}(r), \overline{u}(r)] \quad = \left[\delta - \sqrt{-\frac{(\log_e r)}{\lambda}}, + \sqrt{-\frac{(\log_e r)}{\lambda}}\right], where$$

$$r \in [0,1]$$



شكل 3: يبين العدد الضبابي الجاوسي

تم عرض التمثيل البياني للأعداد الضبابية المثلثية وشبه المنحرف والجاوسية، الحدود العليا والدنيا تلبي المتطلبات الاتية:

1. $\underline{u}(r)$ هى دالة غير متناقصة ومحدودة من اليسار بـ $[0,1]$.
2. $\overline{u}(r)$ هى دالة غير متزايدة ومحدودة من اليمين بـ $[0,1]$.
3. $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r), 0 \leq x \leq 1$

تعريف6: درجة الانتماء[5]

تعتبر درجة ودالة الانتماء من أهم العناصر وحجر الزاوية في الرياضيات الضبابية والمكون الجديد الذي أضيف للعناصر والمجموعات التقليدية، والتي من أجلها أخذ هذا النوع من العلوم استقلاليته. يرتكز هذا المفهوم على عدم وجود انتماء تام لعنصر في مجموعة فقط، بل هناك انتماء جزئي لعنصر ما في هذه المجموعة. إن درجة انتماء عنصر تحدد مدى قربه من العناصر ذات الانتماء التام، وتحدد هذه الدرجة بين (الصفر والواحد).

فإذا كانت درجة انتماء العنصر (صفر) معنى ذلك أن هذا العنصر بعيد كل البعد عن العناصر ذات الانتماء التام والتي درجتها (الواحد)، وكلما كانت درجة الانتماء قريبة من الواحد كان قرب العنصر من العناصر ذات الانتماء التام كبيراً.

تعريف 7: دالة الانتماء ***[8] Membership Function***

دالة الانتماء μ_Aهي دالة عددية تأخذ قيمتها في المجال$[0,1]$ يتم بواسطتها حساب درجة انتماء عنصر ما للمجموعة الضبابية.

فإذا كانت X مجموعة غير خالية و A مجموعة جزئية منها وليكن $I=[0,1]$ فتعرف دالة الانتماء $\mu_A: \mathrm{X} \to \mathrm{I}$ حيث تربط لكل عنصر $x \in X$ بالعدد الحقيقي $\mu_A(x)$.

تعريف 8: المركز الضبابي Fuzzy Centre

يتم تعريف المركز الضبابي للعدد العشوائي $\tilde{u}=[\underline{u}(r),\overline{u}(r)]$ كالتالي :

$$\tilde{u}^c=\frac{\underline{u}(r)+\overline{u}(r)}{2} \quad for\ all \quad 0 \le r \le 1$$

تعريف9: نصف القطر الضبابي Fuzzy Radius *[4]*

يعرف نصف القطر الضبابي للعدد العشوائي $\tilde{u}=[\underline{u}(r),\overline{u}(r)]$ كالتالي :

$$\Delta\tilde{u}=\frac{\overline{u}(r)-\underline{u}(r)}{2} \quad for\ all \quad 0 \le r \le 1$$

تعريف 10:مشتقة هوكوهارا Hukuhara Derivative [14 ,5]

ليكن $F:(a,b) \to R_F$ و $t_0=(a,b)$. X قابلة للتفاضل في t_0 ، إذا كان هناك $F'(t_0) \in R_F$ بحيث:

1. لكل $h>0$ قريبة جداً من الصفر (فرق **Hukuhara**)

$F(t_0+h)\Theta F(t_0)$ و $F(t_0)\Theta F(t_0-h)$ موجود (في المتريك D).

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(t_0+h)\Theta F(t_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{F(t_0)\Theta F(t_0-h)}{h}=F'(t_0)$$

أو

2. لكل $h>0$ قريبة جداً من الصفر(فرق **Hukuhara**)

$F(t_0)\Theta(t_0+h)$ و $F(t_0-h)\Theta F(t_0)$ موجود (في المتريكD).

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(t_0)\Theta F(t_0+h)}{-h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{F(t_0-h)\Theta F(t_0)}{-h}=F'(t_0)$$

نظرية1:[9 ,4]

لتكن $F:(a,b) \to R_F$ و

ونرمز $[F(a;b)]=\left[\underline{f}(a;b),\overline{f}(a;b)\right]$ لكل $r \in [0,1]$:

1. إذا كانت F قابلة للتفاضل من النوع الأول (I) ، فإن $\underline{f}(a;b)$ و $\overline{f}(a;b)$ تكون دوال قابلة للتفاضل ولدينا:

$[F'(a;b)]=\left[\underline{f'}(a;b),\overline{f'}(a;b)\right]$.

2. إذا كانت F قابلة للتفاضل من النوع الثاني (II) ، فإن $\overline{f}(a;b)$ و $\underline{f}(a;b)$ تكون دوال قابلة للتفاضل ولدينا:

$[F'(a;b)] = \left[\overline{f'}(a;b), \underline{f'}(a;b)\right]$.

تعريف11: *التكامل الضبابي الكسري لريمان- ليوفيل* [4] *Fuzzy Riemann–Liouville Fractional Integral*

يعرف التكامل الكسري الضبابي لريمان-ليوفيل بالمؤثر J^{α} من الرتبة α بالعلاقة:

$$\left[J^{\alpha}\tilde{f}(t:r)\right] = \left[J^{\alpha}\underline{f}(t:r), J^{\alpha}\bar{f}(t:r)\right], t > 0 \qquad (8)$$

عندما

$$J^{\alpha}\underline{f}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\,\underline{f}(\tau)d\tau, \qquad t > 0$$

$$J^{\alpha}\bar{f}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\,\bar{f}(\tau)d\tau, \qquad t > 0$$

تعريف12: المشتقات الضبابية الكسرية من نوع كابوتو *[7] Caputo-Type Fuzzy Fractional Derivatives*

لتكن $\tilde{f}(t:r)$ قيمة الدالة الضبابية و

لكل $\left[\tilde{f}(t:r)\right] = \left[\underline{f}(t:r), \bar{f}(t:r)\right]$

$r\epsilon[0,1], 0 < \alpha < 1, and\ t \in (a,b)$

1- إذا كانت $\tilde{f}(t:r)$ دالة تفاضلية كسرية ضبابية من نوع كابوتو من النوع الأول فإن
$$\left[D^{\alpha}\tilde{f}(t:r)\right] = \left[D^{\alpha}\underline{f}(t:r), D^{\alpha}\bar{f}(t:r)\right]$$
2- إذا كانت $\tilde{f}(t:r)$ دالة تفاضلية كسرية ضبابية من نوع كابوتو من النوع الثاني فإن
$$\left[D^{\alpha}\tilde{f}(t:r)\right] = \left[D^{\alpha}\bar{f}(t:r), D^{\alpha}\underline{f}(t:r)\right]$$

عندما

$$\boldsymbol{D^{\alpha}\underline{f}(t:r) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t \frac{\underline{f}^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}, m-1 < \alpha < m, m \in N}$$

$$\boldsymbol{D^{\alpha}\overline{f}(t:r) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t \frac{\overline{f}^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}, m-1 < \alpha < m, m \in N}$$

$$\boldsymbol{\frac{d^m}{dt^m}f(t), \alpha = m, m \in N}$$

تعريف12: دالة ميتاج-ليفلر *[12] The Mittag-Leffler Function*

تعرف دالة ميتاج-ليفلر بالصيغة التالية:

$$\boldsymbol{E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \alpha \in \mathbb{C}, Re(\alpha) > 0} \qquad (9)$$

تعريف13: مسألة القيمة الابتدائية الضبابية الكسرية Fuzzy Fractional Initial Value Problem [3]

لنعتبر مسألة القيمة الابتدائية الضبابية الكسرية (FFIVP):

$$D^{\alpha}\tilde{y}(t) = f(t, \tilde{y}) \qquad (10)$$

الخاضعة للشرط الابتدائي الضبابي

$$\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0, t \in [a, b], \alpha \in (0,1)$$

$$\left[D^{\alpha}\underline{y}(t:r), D^{\alpha}\overline{y}(t:r)\right] = \left[\underline{f}\left(t, \underline{y}\right), \overline{f}(t, \overline{y})\right]$$

الخاضعة للشرط الابتدائي الضبابي

$$\left[\underline{y}(0), \overline{y}(0)\right] = \left[\underline{y}_0, \overline{y}_0\right]$$

مبرهنة 1:[6]

إذا كانت $\tilde{u}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$ دالة ذات قيمة ثلاثية ضبابية و إذا كانت $\tilde{u}$ قابلة لتفاضل **Hukuhara** فإن $\tilde{u}' = (x', y', z')$.

باستخدام تفاضل **Hukuhara** نوجد حل مسألة القيمة الابتدائية الضبابية **(FIVP)**

$$\tilde{x}'(t) = \tilde{f}(x, t) \qquad (11)$$

الخاضعة للشرط الابتدائي الضبابي $\tilde{x}'(t_0) = \tilde{x}_0$.

بحيث $\tilde{x}(t) = \left(\underline{u}, u^c, \overline{u}\right) \in R$, $\tilde{x}_0 = (\underline{x}_0, x_0^c, \overline{x}_0) \in R$ و

$$f: [t_0, t_0 + a] \times R \to R, f\left(t, \left(\underline{u}, u^c, \overline{u}\right)\right)$$

$$= \left(\underline{f}\left(t, \underline{u}, u^c, \overline{u}\right), f^c\left(t, \underline{u}, u^c, \overline{u}\right), \overline{f}\left(t, \underline{u}, u^c, \overline{u}\right)\right)$$

يمكننا تحويلها إلى نظام من المعادلات التفاضلية العادية التالية:

$$\begin{cases} \underline{u} = \underline{f}\left(t, \underline{u}, u^c, \overline{u}\right) \\ u^c = f^c\left(t, \underline{u}, u^c, \overline{u}\right) \\ \overline{u} = \overline{f}\left(t, \underline{u}, u^c, \overline{u}\right) \\ \underline{u}(0) = \underline{x}_0, u^c(0) = x_0^c, \overline{u}(0) = \overline{x}_0 \end{cases}$$

3- المعادلات التفاضلية الضبابية الكسرية الخطية من الرتبة n n-TERM LINEAR FUZZY FRACTIONAL LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS[4]

لنعتبر المعادلات التفاضلية الضبابية من الرتبة n في الصورة العامة كالتالي

$$D^{\lambda_n}\tilde{y}(t;r)+a_{n-1}(t)D^{\lambda_{n-1}}\tilde{y}(t;r)+\cdots+a_1(t)D^{\lambda_1}\tilde{y}(t;r)+a_0(t)\,D^{\lambda_0}\tilde{y}(t;r) = \tilde{g}(t;r)\,, \quad (12)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\tilde{y}^{(k)}(0;r)=\tilde{b}_k(r), k=0,1,2,\dots n-1, n-1<\lambda<n$$

حيث $n+1>\lambda\geq n>\lambda_{n-1}>\cdots>\lambda_1>\lambda_0$ و $a_i(t), 0\leq i\leq n-1$ ثوابت حقيقية و $\tilde{b}_k, 0\leq k\leq n-1$ أعداد ضبابية. و D^{λ_n} توضح التفاضل الكسري لكابوتو و $\tilde{y}(t;r)$ هو الحل الذي سيتم تحديده.

من خلال $r-cut\ approach$ نستطيع كتابة المعادلة التفاضلية الضبابية السابقة كما يلي:

$$\left[D^{\lambda_n}\underline{y}(t;r),D^{\lambda_n}\overline{y}(t;r)\right]+a_{n-1}(t)\left[D^{\lambda_{n-1}}\underline{y}(t;r),D^{\lambda_{n-1}}\overline{y}(t;r)\right]+\cdots + a_1(t)\left[D^{\lambda_1}\underline{y}(t;r),D^{\lambda_1}\overline{y}(t;r)\right]+a_0(t)\left[D^{\lambda_0}\underline{y}(t;r),D^{\lambda_0}\overline{y}(t;r)\right] = \left[\underline{g}(t;r),\overline{g}(t;r)\right], \quad (13)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\left[\underline{y}^{(k)}(0;r),\overline{y}^{(k)}(0;r)\right]=\left[\underline{b}_k(r),\overline{b}_k(r)\right], k=0,1,2,\dots n-1, \quad n-1\leq\lambda<n, where\ r\in[0,1],$$

نلاحظ أنه قد يكون لدينا ثلاث حالات فيما يتعلق بإشارة المعاملات.

الحالة الأولى

المعاملات $a_{n-1}(t), a_{n-2}(t),\cdots,a_1(t),a_0(t)$ كلها موجبة

باستخدام تعريف تفاضل Hukuhara يمكن أن نكتب المعادلة (13) على النحو التالي:

$$D^{\lambda_n}\underline{y}(t;r)+a_{n-1}(t)D^{\lambda_{n-1}}\underline{y}(t;r)+\cdots+a_1(t)D^{\lambda_1}\underline{y}(t;r)+a_0(t)\,D^{\lambda_0}\underline{y}(t;r) = \underline{g}(t;r)\,, \quad (14)$$

و

$$D^{\lambda_n}\overline{y}(t;r)+a_{n-1}(t)D^{\lambda_{n-1}}\overline{y}(t;r)+\cdots+a_1(t)D^{\lambda_1}\overline{y}(t;r)+a_0(t)D^{\lambda_0}\,\overline{y}(t;r) = \overline{g}(t;r)\,, \quad (15)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\left[\underline{y}^{(k)}(0;r),\overline{y}^{(k)}(0;r)\right]=\left[\underline{b}_k(r),\overline{b}_k(r)\right],k=0,1,2,\dots n-1,n-1\leq\lambda<n,where\ r\in[0,1],$$

الحالة الثانية

المعاملات $a_{n-1}(t),a_{n-2}(t),\cdots,a_1(t),a_0(t)$ كلها سالبة

$$D^{\lambda_n}\underline{y}(t;r)+a_{n-1}(t)D^{\lambda_{n-1}}\overline{y}(t;r)+\cdots+a_1(t)D^{\lambda_1}\overline{y}(t;r)+a_0(t)\,D^{\lambda_0}\overline{y}\,(t;r)=\underline{g}(t;r)\,,\qquad(16)$$

و

$$D^{\lambda_n}\overline{y}(t;r)+a_{n-1}(t)D^{\lambda_{n-1}}\underline{y}(t;r)+\cdots+a_1(t)D^{\lambda_1}\underline{y}(t;r)+a_0(t)D^{\lambda_0}\underline{y}(t;r)=\overline{g}(t;r)\,,\qquad(17)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\left[\underline{y}^{(k)}(0;r),\overline{y}^{(k)}(0;r)\right]=\left[\underline{b}_k(r),\overline{b}_k(r)\right],k=0,1,2,\dots n,\quad n-1\leq\lambda<n,\quad where\ r\in[0,1]$$

الحالة الثالثة

المعاملات $a_{n-1}(t),\cdots,a_{n-m}(t)$ تكون موجبة و $a_{n-m-1}(t),\cdots,a_{n-m-2}(t),\cdots,a_1(t),a_0(t)$ تكون سالبة. من المعادلة (13) تكون لدينا:

$$D^{\lambda_n}\underline{y}(t;r)+a_{n-1}(t)D^{\lambda_{n-1}}\underline{y}(t;r)+\cdots+a_{n-m}(t)D^{\lambda_{n-m}}\underline{y}(t;r)+a_{n-m-1}(t)D^{\lambda_{n-m-1}}\overline{y}(t;r)+a_0(t)D^{\lambda_0}\,\overline{y}(t;r)=\underline{g}(t;r)\,,\qquad(18)$$

و

$$D^{\lambda_n}\overline{y}(t;r)+a_{n-1}(t)D^{\lambda_{n-1}}\overline{y}(t;r)+\cdots+a_{n-m}(t)D^{\lambda_{n-m}}\overline{y}(t;r)+a_{n-m-1}(t)D^{\lambda_{n-m-1}}\underline{y}(t;r)+a_0(t)D^{\lambda_0}\,\underline{y}(t;r)=\overline{g}(t;r)\,,\qquad(19)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\left[\underline{y}^{(k)}(0;r),\overline{y}^{(k)}(0;r)\right]=\left[\underline{b}_k(r),\overline{b}_k(r)\right],k=0,1,2,\dots n,n-1\leq\lambda<n,\quad where\ r\in[0,1],$$

طريقة المركز الضبابي (Fuzzy Centre -Based Methods) لحل المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية من الرتبة n [5, 7, 10].

تمت مناقشة طريقة المركز الضبابي(FCM) باستخدام المركز الضبابي لحل المعادلات التفاضلية الخطية الضبابية من الرتبة n، وفيما يتعلق بثلاث حالات. أولا يتم الحصول على حل المركز الضبابي ثم يتم كتابة الحد الادنى بدلالة المركز الضبابي. ومن هذا يمكن أن نجد الحد الاعلى للحل الضبابي. وبالمثل يمكن الحصول على الحد الادنى.

الحالة1: المعاملات$a_{n-1}(t), a_{n-2}(t), \cdots, a_1(t), a_0(t)$ كلها موجبة.

أولاً: يمكن كتابة المعادلة (12) بدلالة المركز الضبابي بالشكل التالي:

$$D^{\lambda_n}\tilde{y}^c(t;r) + a_{n-1}(t)D^{\lambda_{n-1}}\tilde{y}^c(t;r) + \cdots + a_1(t)D^{\lambda_1}\tilde{y}^c(t;r) + a_0(t)D^{\lambda_0}\tilde{y}^c(t;r) = \tilde{g}^c(t;r) \qquad (20)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$(\tilde{y}^c)^{(k)}(0) = \tilde{b}_k^c, \qquad k = 0,1,2, \dots n-1, \qquad n-1 \le \lambda < n$$

يمكن بسهولة حل المعادلة (20) للحصول على$\tilde{y}^c(t)$ باستخدام تحويل لابلاس لمشتقة كابوتو. الان عند حل المعادلة (14) أو (15)، يمكن الحصول $\underline{y}(t;r), \overline{y}(t;r)$علي التوالي. بعد ذلك، باستبدال القيمة$\tilde{y}^c(t)$ المذكورة أعلاه لـ $\underline{y}(t;r)$ أو$\overline{y}(t;r)$ لتعريف المركز الضبابي، قد نجد الحل $\underline{y}(t;r) = 2\tilde{y}^c(t) - \overline{y}(t;r)$ أو $\overline{y}(t;r) = 2\tilde{y}^c - \underline{y}(t;r)$.

$$\overline{y}(t;r) = (0.2r + 0.8)E_\alpha(t^\alpha)$$

و

$$\underline{y}(t;r) = (1.2 - 0.2r)E_\alpha(t^\alpha)$$

الحالة2: المعاملات$a_{n-1}(t), a_{n-2}(t), \cdots, a_1(t), a_0(t)$كلها سالبة**.** يمكن كتابة المعادلة (12) بدلالة المركز الضبابي بالشكل التالي:

$$D^{\lambda_n}\tilde{y}^c(t;r) - a_{n-1}(t)D^{\lambda_{n-1}}\tilde{y}^c(t;r) - \cdots + a_1(t)D^{\lambda_1}\tilde{y}^c(t;r) - a_0(t)D^{\lambda_0}\tilde{y}^c(t;r) = \tilde{g}^c(t;r) \qquad (21)$$

مع الشروط الابتدائية الضبابية

$$(\tilde{y}^c)^{(k)}(0) = \tilde{b}_k^c, \qquad k = 0,1,2, \dots n-1, \qquad n-1 \le \lambda < n$$

يمكن للحصول على$\tilde{y}^c(t)$ بحل المعادلة (21) باستخدام تعريف المركز الضبابي، يمكن كتابة المعادلتين (16)و (17) على النحو التالي:

$$D^{\lambda_n}\underline{y}(t;r) + a_{n-1}(t)D^{\lambda_{n-1}}\left(2\tilde{y}^c(t;r) - \underline{y}(t;r)\right) + \cdots + a_1(t)D^{\lambda_1}\left(2\tilde{y}^c(t;r) - \underline{y}(t;r)\right) + a_0(t)D^{\lambda_0}\left(2\tilde{y}^c(t;r) - \underline{y}(t;r)\right) = \underline{g}(t;r) \qquad (22)$$

و

$$D^{\lambda_n}\overline{y}(t;r) + a_{n-1}(t)D^{\lambda_{n-1}}(2\tilde{y}^c(t;r) - \overline{y}(t;r)) + \cdots + a_1(t)D^{\lambda_1}(2\tilde{y}^c(t;r) - \overline{y}(t;r)) + a_0(t)D^{\lambda_0}(2\tilde{y}^c(t;r) - \overline{y}(t;r)) = \overline{g}(t;r) \qquad (23)$$

يمكن ملاحظة المعادلات التفاضلية المذكورة أعلاه أصبحت الان معادلة تفاضلية واضحة، يمكن الحصول على ذلك الحل لـ $\underline{y}(t;r)$ أو $\overline{y}(t;r)$ وتطبيق تعريف المركز الضبابي، قد نجد الحل $\underline{y}(t;r) = 2\tilde{y}^c - \overline{y}$ أو $\overline{y}(t;r) = 2\tilde{y}^c - \underline{y}$.

الحالة3: المعاملات $a_{n-1}(t), \cdots, a_{n-m}(t)$ كلها موجبة و $a_{n-m-1}(t), a_{n-m-2}(t), \cdots, a_1(t), a_0(t)$ كلـــها سالبة. يمكن كتابة المعادلة (11) بدلالة المركز الضبابي بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} D^{\lambda_n}\tilde{y}^c(t;r) + a_{n-1}(t)D^{\lambda_{n-1}}\tilde{y}(t;r) + \cdots + a_{n-m}(t)D^{\lambda_{n-m}}\tilde{y}(t;r) \\ - a_{n-m-1}(t)D^{\lambda_{n-m-1}}\tilde{y}(t;r) + \cdots - a_0(t)D^{\lambda_0}\tilde{y}(t;r) \\ = \tilde{g}^c(t;r) \qquad\qquad (24) \end{aligned}$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$(\tilde{y}^c)^{(k)}(0) = \tilde{b}_k^c, \qquad k = 0,1,2, \dots n-1, \qquad n-1 \le \lambda < n$$

وبالمثل يمكن للحصول عل الحل $\tilde{y}^c(t;r)$. بعد ذلك يمكن كتابة المعادلتين (18) و (19) على النحو التالي:

$$\begin{aligned} D^{\lambda_n}\underline{y}(t;r) + a_{n-1}(t)D^{\lambda_{n-1}}\underline{y}(t;r) + \cdots + a_{n-m}(t)D^{\lambda_{n-m}}\underline{y}(t;r) \\ + a_{n-m-1}(t)D^{\lambda_{n-m-1}}\left(2y^c(t;r) - \underline{y}(t;r)\right) \\ + a_0(t)D^{\lambda_0}\left(2y^c(t;r) - \underline{y}(t;r)\right) = \underline{g}(t;r) \qquad (25) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} D^{\lambda_n}\overline{y}(t;r) + a_{n-1}(t)D^{\lambda_{n-1}}\overline{y}(t;r) + \cdots + a_{n-m}(t)D^{\lambda_{n-m}}\overline{y}(t;r) \\ + a_{n-m-1}(t)D^{\lambda_{n-m-1}}\left(2y^c(t;r) - \overline{y}(t;r)\right) \dots \\ + a_0(t)D^{\lambda_0}(2y^c(t;r) - \overline{y}(t;r)) = \overline{g}(t;r) \qquad (26) \end{aligned}$$

4- أمثلة تطبيقية

مثال1:

عين حل المعادلة التفاضلية الضبابية الكسرية الخطية التالية

$$D^\alpha\tilde{y}(t;r) = \tilde{y}(t;r), 0 < \alpha < 1, \qquad r \in [0,1] \quad (27)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\tilde{y}(0) = [0.2r + 0.8, 1.2 - 0.2r]$$

الحل:

عندما $r = 1$ الحل المضبوط يعطى

$$y(t) = E_\alpha(t^\alpha)$$

ووفقا للمعادلة التفاضلية (20) يمكن كتابة المعادلة التفاضلية (27) في الصورة:

$$\boldsymbol{D^{\alpha}\tilde{y}^{c}(t;r) = \tilde{y}^{c}(t;r)} \qquad (28)$$

بحل المعادلة (28)

$$\tilde{y}^{c}(t;r) = E_{\alpha}(t^{\alpha})$$

وحل أي من المعادلات (14)و(15) تعطى القيمة على النحو التالي:

$$\underline{y}(t;r) = (0.2r + 0.8)E_{\alpha}(t^{\alpha})$$

و

$$\overline{y}(t;r) = (1.2 - 0.2r)E_{\alpha}(t^{\alpha})$$

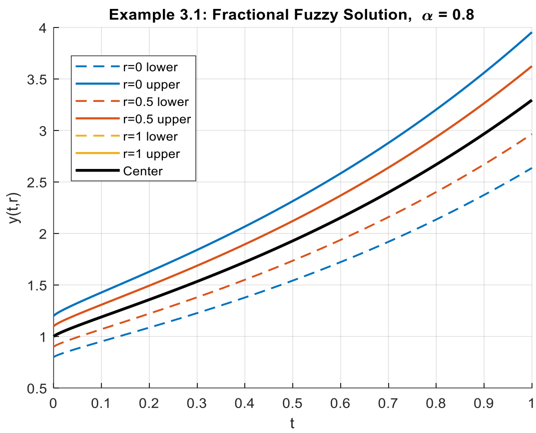
ومن ثم نجد الحل:

$$\tilde{y}(t;r) = \left[\underline{y}(t;r), \overline{y}(t;r)\right]$$

$$\overline{y}(t;r) = (0.2r + 0.8)E_{\alpha}(t^{\alpha})$$

و

$$\underline{y}(t;r) = (1.2 - 0.2r)E_{\alpha}(t^{\alpha})$$



شكل 4: يبين الحل الضبابي الكسري للمعادلة التفاضلية الضبابية بالمثال 1

مثال2:

عين حل المعادلة التفاضلية الضبابية الكسرية الخطية التالية

$$D^{\alpha}\tilde{y}(t;r) = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}t^{1-\alpha} - \tilde{y}(t;r) + t^{2} - t\,, t > 0, 0 < \alpha \leq 1, r \in [0,1]$$

الخاضعة للشروط الشروط الابتدائية الضبابية

$$\tilde{y}(0) = [0.2r - 0.2, 0.2 - 0.2r]$$

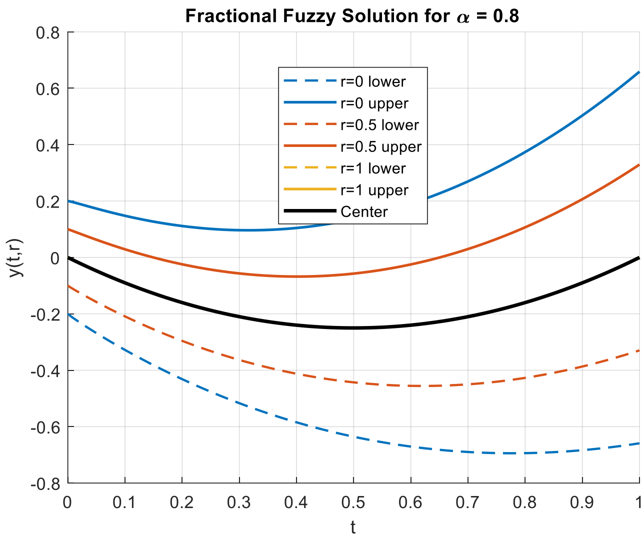
الحل:

نستطيع ايجاد الحل $\tilde{y}^c(t;r) = t^2 - t$

وبتطبيق طريقة المركز الضبابي نحصل على الحل

$$\underline{y}(t;r) = (0.2r - 0.2)E_\alpha(t^\alpha) + t^2 - t$$

$$\overline{y}(t;r) = (0.2 - 0.2r)E_\alpha(t^\alpha) + t^2 - t$$



شكل 5: يبين الحل الضبابي الكسري للمعادلة التفاضلية الضبابية بالمثال 2

مثال3:

عين حل المعادلة التفاضلية الضبابية الكسرية الخطية التالية

$$D^{1.5}\tilde{y}(t;r) + 2D^{0.5}\tilde{y}(t;r) - 3\tilde{y}(t;r) = \tilde{g}(t;r) \quad (29)$$

$$\tilde{g}(t;r) = [r, 2 - r]$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\tilde{g}^c(0;r) = [r, 2 - r],$$

$$(\tilde{g}^c)'(0;r) = [r, 2 - r]$$

الحل: نكتب المعادلة (29)على الصورة

$$D^{1.5}\tilde{y}^c(t;r) + 2D^{0.5}\tilde{y}^c(t;r) - 3\tilde{y}^c(t;r) = \tilde{g}^c(t;r),$$

$$\tilde{g}^c(t;r) = \frac{r + (2 - r)}{2} = 1$$

$$D^{1.5}\tilde{y}^c(t) + 2D^{0.5}\tilde{y}^c(t) - 3\tilde{y}^c(t) = 1$$

بالتعويض بالشروط الابتدائية واستخدام تحويل لابلاس وتحويل لابلاس العكسي نحصل على

$$y^c(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

باستخدام المعادلتين (25)و (26) نتحصل على:

$$D^{1.5}\underline{y}(t;r) + 2D^{0.5}\underline{y}(t;r) + 3\left[2y^c(t;r) - \underline{y}(t;r)\right] = \tilde{g}(t;r) = r$$

أي أن

$$D^{1.5}\underline{y}(t;r) + 2D^{0.5}\underline{y}(t;r) - 3\underline{y}(t;r) + 6y^c(t;r) = r$$

بالتعويض عن y^c نحصل على:

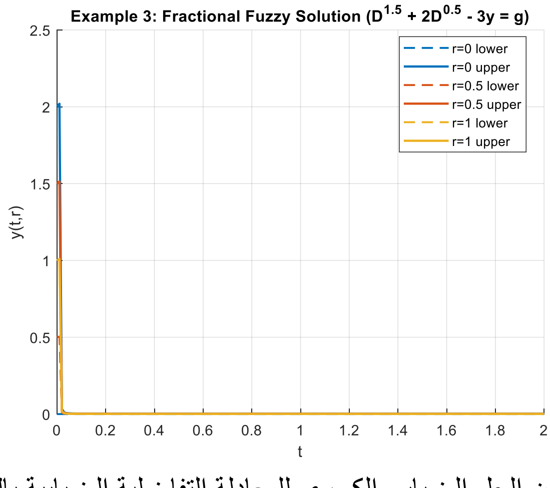
$$D^{1.5}\underline{y}(t;r) + 2D^{0.5}\underline{y}(t;r) - 3\underline{y}(t;r) = r - 6(1 + t + \frac{t^2}{2})$$

ومن ثم نجد الحل:

$$\tilde{y}(t;r) = \left[\underline{y}(t;r), \overline{y}(t;r)\right]$$

$$\underline{y}(t;r) = r + t + \frac{t^2}{2}$$

$$\overline{y}(t;r) = (2 - r) + t + \frac{t^2}{2}$$



شكل6: يبين الحل الضبابي الكسري للمعادلة التفاضلية الضبابية بالمثال 3

5- النتائج والمناقشة

أثبتت الدراسة الحالية فعالية منهجية طريقة المركز الضبابي (FCM) في معالجة وحل المعادلات التفاضلية الضبابية الخطية من الرتبة (n) تحت مختلف حالات إشارات المعاملات (الموجبة، السالبة، والمختلطة). وقد تم التحقق من دقة

وموثوقية النتائج عبر مقارنتها مع الحلول المضبوطة (Exact Solutions) عند(r=1)، وكذلك مع طرق أخرى موثقة في الأدبيات مثل طريقة الجمع والطرح الضبابي (ASFM) (Ashat, Egadi, & Beitalmal, 2025).

أظهرت النتائج المستخلصة من الأمثلة التطبيقية (المثال 1، 2، و3) اتفاقًا تامًا بين حلول طريقة (FCM) والحلول المضبوطة مما يؤكد الدقة العالية للطريقة المقترحة. كذلك أبرزت الدراسة مرونة الطريقة وقدرتها على التعامل مع الحالات المختلفة لإشارات المعاملات كما تم التحقق من جميع النتائج رقميًا باستخدام برنامج MATLAB مما يعزز مصداقيتها. وبمقارنة النتائج مع العمل الحديث لـ (Ashat, Egadi, & Beitalmal, 2025)، لوحظ أن كلا الطريقتين (FCM وASFM) تنتجان نتائج متطابقة تقريبًا مع الحل المضبوط، مما يشير إلى قوة وكفاءة كلتا الاستراتيجيتين في التعامل مع عدم اليقين في النمذجة الرياضية.

الاستنتاجات

1. أثبتت الدراسة أن **طريقة المركز الضبابي (Fuzzy Centre Method - FCM)** تمثل إطارًا تحليليًا قويًا لحل المعادلات التفاضلية الضبابية الكسرية الخطية من الرتبة n، حيث توفر حلولاً دقيقة ومنتظمة لمختلف أنواع المعاملات.
2. أظهرت النتائج التطبيقية تطابقًا شبه تام بين الحلول المتحصل عليها باستخدام (FCM) والحلول المضبوطة (Exact Solutions) عند $r = 1$، مما يدل على **دقة وكفاءة الطريقة المقترحة** في التنبؤ بالسلوك الديناميكي للأنظمة الضبابية.
3. أثبتت الدراسة أن الطريقة المقترحة تتميز **بالمرونة والموثوقية العالية** في معالجة الحالات الثلاث للمعاملات (موجبة، سالبة، مختلطة)، وهو ما يعزز قابليتها للتطبيق في نماذج واقعية ذات معاملات متنوعة.
4. أظهرت المقارنة بين طريقة (FCM) وطريقة الجمع والطرح الضبابي (ASFM) أن الطريقتين متقاربتان جدًا في النتائج، مما يثبت **صحة المنهج الرياضي المستخدم في تحويل المعادلات الضبابية إلى معادلات تقليدية قابلة للحل التحليلي**.
5. أكدت الحسابات العددية المنفذة ببرنامج **MATLAB** أن طريقة المركز الضبابي تمتاز **بكفاءة حسابية عالية** ودقة في التقريب العددي، مما يجعلها أداة فعالة في التطبيقات العملية والمعقدة.
6. يمكن اعتبار طريقة (FCM) **مساهمة رياضية نوعية** في توسيع نطاق الحلول التحليلية للمعادلات التفاضلية الضبابية الكسرية، خصوصًا في ظل ازدياد الاهتمام بالنمذجة الرياضية في الأنظمة التي تتضمن عدم يقين.

A. التوصيات

1. **توسيع نطاق تطبيق طريقة المركز الضبابي (FCM)** لتشمل المعادلات التفاضلية الضبابية غير الخطية والأنظمة الضبابية متعددة المتغيرات من الرتب الكسرية.
2. **إجراء دراسات مقارنة إضافية** بين (FCM) وأساليب أخرى حديثة مثل طريقة تحويل هوموتوبي (Homotopy Transform Method) أو طريقة تحويل لابلاس الكسري (Fractional Laplace Transform) لتقييم الأداء النسبي لكل طريقة.
3. **تطبيق الطريقة المقترحة في المجالات التطبيقية** كالتحكم الهندسي، الاقتصاد الرياضي، والعلوم الحيوية، للتحقق من فاعليتها في النمذجة الواقعية التي تتضمن بيانات غير دقيقة أو غير مؤكدة.
4. **تطوير أدوات برمجية أو حزم في MATLAB و Python** لتسهيل تطبيق طريقة (FCM) على نطاق أوسع بين الباحثين والطلاب في مجالات الرياضيات التطبيقية والهندسة.
5. **تشجيع الدراسات المستقبلية** على دمج طريقة (FCM) مع تقنيات الذكاء الاصطناعي (مثل الشبكات العصبية الضبابية) لتحسين كفاءة الحلول في النظم المعقدة عالية الأبعاد.

References

1. "Allahviranloo, T. (2020). *Fuzzy fractional differential operators and equations: Fuzzy fractional differential equations.* Springer International Publishing".
2. "Ashat, A. A., Egadi, H. M., & Beitalmal, A. O. (2025). *Using the method based on addition and subtraction of fuzzy numbers to solve linear fuzzy differential equations of*

order n with initial conditions. In *The 8th Annual Conference on Theories and Applications of Basic and Biosciences".*
3. "Buckley, J. J., & Feuring, T. (2001). Fuzzy initial value problem for nth-order linear differential equations. *Fuzzy Sets and Systems, 121*(2), 247–255. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00122-3"
4. "Chakraverty, S., Tapaswini, S., & Behera, D. (2016a). *Fuzzy arbitrary order system: Fuzzy fractional differential equations and applications.* John Wiley & Sons.
5. Chakraverty, S., Tapaswini, S., & Behera, D. (2016b). *Fuzzy differential equations and applications for engineers and scientists.* CRC Press.
6. Chakraverty, S., Tapaswini, S., & Behera, D. (2016c). Analytical methods for fuzzy fractional differential equations (FFDEs). In *Fuzzy arbitrary order system* (pp. 15–29). John Wiley & Sons. https://doi.org/10.1002/9781119009305.ch2
7. Chehlabi, M., & Allahviranloo, T. (2024). Existence of generalized Hukuhara differentiable solutions to a class of first-order fuzzy differential equations in dual form. *Fuzzy Sets and Systems, 478,* 108839. https://doi.org/10.1016/j.fss.2023.108839
8. Elgadi, H. M., & Ashat, A. A. (2024). Using the fuzzy centre method to solve nth-order linear fuzzy differential equations with boundary and initial conditions. *Sebha University Conference Proceedings, 3*(2). https://doi.org/10.51984/sucp.v3i2.3438
9. Gasilov, N., Amrahov, Ş., & Fatullayev, A. (2009). A geometric approach to solve fuzzy linear systems of differential equations [Preprint]. *arXiv.* https://arxiv.org/abs/0910.4307
10. Georgiou, D. N., Nieto, J. J., & Rodríguez-López, R. (2005). Initial value problems for higher-order fuzzy differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 63*(5–7), e587–e600. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.01.123
11. Ibraheem, R. H. (2022). Solving linear and nonlinear systems of fuzzy differential equations by using differential transform method. *Journal of the College of Basic Education, 28*(115), 20–37.
12. Khalouta, A., & Kadem, A. (2019). A new method to solve fractional differential equations: Inverse fractional Shehu transform method. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM), 14*(2), 926–941. http://pvamu.edu/aam
13. Mazandarani, M., & Kamyad, A. V. (2013). Modified fractional Euler method for solving fuzzy fractional initial value problem. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 18*(1), 12–21. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.06.008
14. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control, 8*(3), 338–353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

Compliance with ethical standards

Disclosure of conflict of interest

The authors declare that they have no conflict of interest.