Journal of Libyan Academy Bani Walid 2026
مجلة الأكاديمية الليبية بني وليد
e-ISSN: 3104-3860
Volume 2, Issue 2, 2026, Pages: 22-35
Website: https://journals.labjournal.ly/index.php/Jlabw/index

# Study of Some Analytical Methods for Solving Fredholm Integral Equation of the Second Kind

**Amal Mohammed Abulqasim Krimid** *
Department of Mathematics, Faculty of Education, Zintan University, Zintan, Libya
*Email: sanady2017@gmail.com

# دراسة بعض الطرق التحليلية لحل معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني

**امال محمد ابوالقاسم كريميد** *
قسم الرياضيات، كلية التربية، جامعة الزنتان، الزنتان، ليبيا

| **Received:** 07-01-2026 | **Accepted:** 27-02-2026 | **Published**: 10-03-2026 |
|---|---|---|
**Copyright:** © 2026 by the authors. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

**Abstract**

Integral equations are considered among the most important mathematical tools in modeling physical and engineering phenomena, especially Fredholm integral equations of the second kind, which arise in problems such as heat diffusion and quantum mechanics. This research aims to study the concept of integral equations and classify them according to the type of kernel, as well as to review various analytical methods for solving Fredholm integral equations of the second kind. In addition, numerical applications using MATLAB are presented to verify the validity of the solutions.

Four main analytical methods are employed: the Adomian Decomposition Method, the Modified Method, the Direct Computation Method for separable kernels, and the Successive Approximations Method. These methods are applied to selected problems, and MATLAB codes are developed for each method to compare analytical and numerical solutions.

The results show complete agreement between the analytical solutions and the numerical results obtained using MATLAB for all selected examples. The analytical methods also confirm the existence and uniqueness of the solution under appropriate conditions. Furthermore, the numerical applications demonstrate the convergence speed of iterative methods and the accuracy of the obtained solutions.

This study confirms that combining analytical methods with numerical applications using MATLAB provides a deeper understanding of integral equations and facilitates the verification of solution accuracy, thereby supporting their use in various scientific and engineering applications.

**Keywords:** Integral Equations, Fredholm Equation, Separable Kernel, Adomian Method, MATLAB, Successive Approximations.

**الملخص**

تُعد المعادلات التكاملية من أهم الأدوات الرياضية في نمذجة الظواهر الفيزيائية والهندسية، خاصة معادلات فريدهولم من النوع الثاني التي تظهر في مسائل الانتشار الحراري والميكانيكا الكمية. يهدف هذا البحث إلى دراسة مفهوم المعادلة التكاملية وتصنيفها حسب نوع النواة، واستعراض الطرق التحليلية المختلفة لحل معادلة فريدهولم من النوع الثاني، مع تقديم تطبيقات عددية باستخدام برنامج ماتلاب للتحقق من صحة الحلول. تم استخدام أربع طرق تحليلية رئيسية وهي طريقة التحليل لأدوميان، الطريقة المعدلة، طريقة الحساب المباشر للنواة القابلة للفصل وطريقة التقريبات المتتالية. تم تطبيق هذه الطرق على مسائل مختارة وتم إنشاء أكواد ماتلاب لكل طريقة للمقارنة بين الحلول التحليلية والعددية. أظهرت النتائج تطابقاً تاماً بين الحلول التحليلية والنتائج العددية من ماتلاب في جميع الأمثلة المختارة. كما أثبتت الطرق التحليلية وجود ووحدانية الحل تحت الشروط المناسبة. ساهمت التطبيقات العددية في توضيح سرعة تقارب الطرق التكرارية ودقة الحلول المحصلة. تؤكد هذه الدراسة أن الجمع بين الطرق التحليلية والتطبيقات العددية باستخدام ماتلاب يوفر فهماً أعمق للمعادلات التكاملية ويسهل التحقق من صحة الحلول، مما يدعم استخدام هذه المعادلات في التطبيقات العلمية والهندسية المختلفة.

**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التكاملية، معادلة فريدهولم، النواة القابلة للفصل، طريقة أدوميان، ماتلاب، التقريبات المتتالية.

**مقدمة**

يُعد موضوع المعادلات التكاملية من أبرز الأدوات الرياضية وأكثرها أهمية في مجالي الرياضيات البحتة والتطبيقية. فهذه المعادلات تحتل مكانة محورية في تشكيل ونمذجة العديد من المشكلات العلمية والهندسية والميكانيكية [1]. في الواقع، يتم نمذجة العديد من المسائل الفيزيائية في شكل معادلات فريدهولم التكاملية، مثل مسائل نظرية الجهد ومسائل ديريشليه [2]، والكهروستاتيكية [3]، والمسائل الرياضية المتعلقة بالتوازن الإشعاعي [4]، ومسائل نقل الجسيمات في الفيزياء الفلكية ونظرية المفاعلات [5]، ومسائل انتقال الحرارة الإشعاعية التي نوقشت في [6، 7]. كذلك، يمكن تحويل العديد من مسائل القيم الابتدائية والمسائل الحدودية المرتبطة بالمعادلات التفاضلية العادية والجزئية إلى معادلات تكاملية، مما يتيح حلها بطرق أكثر فعالية. ولا يقتصر دور المعادلات التكاملية على التطبيقات فحسب، بل تشكل أيضاً إحدى الركائز الأساسية في العديد من فروع التحليل الرياضي البحت، كالنظرية الحديثة للتحليل الدالي والعمليات العشوائية [8]. وتحتفظ نظرية فريدهولم بمكانتها كإطار رياضي راسخ لهذا النوع من المعادلات، حيث تشكل هذه النظرية حجر الاساس في تحليل تقارب واستقرار الطرق العددية المرتبطة بها [9]. وفي إطار الحلول التحليلية، تم تطوير العديد من الأساليب الفعالة لمعالجة معادلات فريدهولم التكاملية، من أبرزها: طرق النواة المتفردة (degenerate kernel)، وأسلوب تحويل المعادلة التكاملية إلى معادلة تفاضلية عادية، وطريقة أدوميان للتحليل (Adomian decomposition)، والطريقة التحليلية المعدلة، وطريقة التقريبات المتتالية، وغيرها من الطرق الواردة في [10، 11]. أما فيما يتعلق بالحلول العددية لمعادلات فريدهولم التكاملية، فيمكن تصنيفها ضمن ثلاث فئات رئيسية: طرق تقريب النواة المتفردة، والطرق الإسقاطية وطرق نسترم [12، 13، 14]. ولكل من هذه الطرق صيغ تكرارية. ورغم وجود طرق عددية أخرى، تظل هذه الأساليب

الرئيسية الأكثر شيوعاً وانتشاراً في التطبيقات العامة. على الرغم من وفرة هذه الطرق التحليلية والعددية، إلا أن مشكلة البحث تنبع من الصعوبة المستمرة في إيجاد الحلول المضبوطة لمعادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثاني، لا سيما عندما تتسم النواة بالتعقيد أو عندما تعجز الطرق التحليلية التقليدية عن تقديم حلول دقيقة. وتتفاقم هذه المشكلة مع غياب وسائل حسابية دقيقة للتحقق من صحة الحلول التحليلية عند وجودها. لذلك، يهدف هذا البحث إلى تقديم دراسة تحليلية شاملة لمفهوم المعادلات التكاملية وتصنيفاتها المختلفة، مع التركيز على استعراض وتطبيق أبرز الطرق التحليلية المستخدمة في حل معادلة فريدهولم من النوع الثاني. ولتحقيق ذلك، سيتم إنشاء أكواد برمجية باستخدام MATLAB لتطبيق هذه الطرق على مسائل مختارة، بهدف مقارنة النتائج التحليلية بالنتائج العددية وتحليل سرعة تقارب الطرق التكرارية ودقة الحلول المحصلة. وتكتسب هذه الدراسة أهميتها من كونها تقدم مقاربة متكاملة تجمع بين الجانب النظري والتطبيقي، مما يسهم في تقديم مقارنة شاملة تساعد الباحثين والطلاب على تعميق فهمهم لهذه المعادلات واختيار الأنسب منها وفقاً لطبيعة المسألة قيد الدراسة.

.

## 2. المواد والطرق

### 1.2 مفهوم المعادلة التكاملية وتصنيفها

- **تعريف المعادلة التكاملية**

هي المعادلة التي تكون فيها الدالة المجهولة تحت علامة التكامل وقد تكتب خارج علامة التكامل في أحد طرفي المعادلة مثال على ذلك.

$$u(x) = f(x) + \Lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x,y)\, u(y) dy$$

$$f(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} k(x,y)\, u(y) dy$$

$$u(x) = \Lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x,y)\, [u(y)]^{2} dy$$

تسمى معادلات تكاملية، حيث الدالة $u(x)$ هي الدالة المجهولة بينما الدوال الأخرى معلومة، $h(x), g(x)$ حدود التكامل، $\Lambda$ بارامتر ثابت، $k(x,y)$ تسمى النواة في متغيرين $x, y$ [11].

- **تصنيف المعادلات التكاملية:**

**أولا: حسب نوع النواة**

1. معادلة تكاملية ذات نواة $k(x,y)$ متصلة في الفترة [a, b] ولها الشرط $|k(x,y)| \leq M$ حيث M ثابت.
2. معادلة تكاملية ذات نواة الشادة ولها الشرط

$$\left( \iint_{b}^{a} |k(x,y)|^{2} dxdy \right)^{\frac{1}{2}} = C$$

حيث C قيمة محدودة منتهية، وبالتالي فأن المعادلة التكاملية تمسى معادلة من نوع فريدهولم.

3. النواة القابلة للفصل

تسمى النواة $(k(x,y)$ نواة قابلة للفصل أذًا أمكن التعبير عنها كمجموع عدد من الحدود المنتهية بحيث كل حد عبارة عن حاصل ضرب داله في $x$ فقط ودالة في $y$ فقط على النحو الاتى

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,(x) b_i\,(y)$$

4. النواة المتماثلة

الدالة المركبة القيمة $k(x,y)$ تسمى مثماتلة أذا كان $k(x,y) = k(x,y)^*$ حيث ان $(*)$ تعبر عن تبديل متغيرات الدالة، واذًا كانت النواة حقيقية فإن $k(x,y) = k(x,y)$ اما إذا كانت $k(x,y) = -k(x,y)$ هذه النواة تسمى (Skew – symmetric).

## 2.2 معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثاني

تعرف معادله فريدهولم بالصورة الاتية:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

سميت بهذا الاسم نسبة الى الرياضي السويدي ايرك إيقار فريدهولم، حيث يكون فيها حدود التكامل مثبتين بقيم ثابتة والدالة $u(x)$ الدالة المجهولة المطلوب ايجادها و $f(x)$ دالة متصله معلومة و $k(x,t)$ تسمى بالنواة للمعادلة التكاملية وهي دالة معلومة في متغيرين و$\lambda$ برامتر ثابت [11].

وتصنف معادلة فريدهولم التكاملية الى الاتى:

1. *معادله* فريدهولم التكاملية من النوع الأول تظهر فيه الدالة المجهولة تحت علامة التكامل وتكون على الصورة:

$$f(x) = \int_a^b k(x,t)\,u(t)dt$$

2. معادله فريدهولم التكاملية من النوع الثاني تظهر فيه الدالة المجهولة تحت وخارج علامة التكامل كما هو في المعادلة (1).

## 3.2 الطرق التحليلية لحل معادلة فريدهولم التكاملية

نذكر بعض الطرق التحليلية العامة لحل معادلة فريدهولم التكاملية من الرتبة الثانية ومنها طريقة التحليل لأدوميان، طريقة التحليل المعدلة، طريقة الحساب المباشر، طريقة التقريبات المتتالية وطريقة النواة الحالة.

### i. طريقة التحليل لأدوميان (Adomian Decomposition Method)

وهي من الطرق التقريبية المهمة في حل المعادلات التكاملية وتعتمد على فرض حل تقريبي للمعادلة التكاملية (1) على صورة المتسلسلة الأتية:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\ (x) \dots\dots\dots\dots\dots\dots 2$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n\ (x) = f(x)\ + \Lambda \int_a^b k(x,t)(\ \sum_{n=0}^{\infty} u_n\ (x))$$

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + ..$$

$$= f(x)\ + \Lambda \int_a^b k(x,t)\, u_0(x)dt + \Lambda \int_a^b k(x,t)\, u_1(x)dt + \cdots$$

يمكن تحديد حدود هذا الحل وذلك بوضع

$$u_0(x) = f(x) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 3$$

$$u_1(x) = \Lambda \int_a^b k(x,t)\, u_0(x)dt \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 4$$

$$u_2(x) = \Lambda \int_a^b k(x,t)\, u_1(x)dt \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 5$$

وبالتالي يمكن صياغة حدود متسلسلة الحل على الصيغة التكرارية الأتية:

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_n(x) = \Lambda \int_a^b k(x,t)(\ u_{n-1}(x)dt\ , \qquad n = 1.2.3\ \dots.$$

متسلسلة الحل في المعادلة 2 عادة ما يتم اختصارها إلى الحل المضبوط في الحالات التي لا يمكن اختصار متسلسلة الحل فإنه يتم الاكتفاء بعدد محدود من حدودها والتي تعطى تقريباً جيداً للحل.

### ii. طريقة التحليل المعدلة (Modified Decomposition Method)

تُستخدم هذه الطريقة عندما تكون الدالة $f(x)$ في معادلة فريدهولم (1) تتكون من تركيب دالتين او اكثر من كثيرات حدود أو دوال مثلثيه أو دوال زائديه أو غيرها. طريقة التحليل المعدلة تسهل العملية الحسابية وتزيد من سرعة تقارب الحل والاختيار المناسب للدالتين $f_1\ (x), f_2\ (x)$ . يمكنا من الحصول على الحل الدقيق $u(x)$ بعدد قليل من التكرارات إذا كانت $f(x)$ تتكون من حد واحد لايمكن استخدام طريقة التفكيك المعدلة. حيث يتم التعبير عن الدالة $f(x)$ بدالتين

$$f(x) = f_1\ (x) + f_2\ (x)$$

حيث تمثل $f_1\ (x)$ حد او حدين على الأكثر وتمثل $f_2(x)$ باقي الحدود ثم نعيد تطبيق طريقة التحليل القياسية كما يلي، بإعادة كتابة المعادلة (1) على الصورة

$$u(x) = \quad f_1(x) + f_2(x) \; + \Lambda \int_a^b k(x,t)\, u(t) dt$$

وبفرض ان

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

فيكون

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots = f_1(x) + f_2(x) + \Lambda \int_a^b k(x,t)\, u_0(x)\, dt + \Lambda \int_a^b k(x,t)\, u_1(x)\, dt + \cdots$$

الان باختيار

$$u_0(x) = f_1(x)$$

$$u_1(x) = f_2(x) + \Lambda \int_a^b k(x,t)\, u_0(x) dt$$

$$u_2(x) = \Lambda \int_a^b k(x,t)\, u_1(x) dt$$

$$u_3(x) = \Lambda \int_a^b k(x,t)\, u_2(x) dt$$

وبالتالي تكون خوارزمية الحل على الصورة:

$$u_0(x) = f_1(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

$$u_1(x) = f_2(x) + \Lambda \int_a^b k(x,t)\, u_0(t) dt \ \ldots\ldots\ldots 7$$

$$u_{n+1}(x) = \Lambda \int_a^b k(x,t)\, u_n(t) dt, \qquad n = 1.2.3 \ \ldots . 8$$

**iii. طريقة الحساب المباشر للنواة القابلة للفصل (Direct Method for Separable Kernels)**

تستخدم هذه الطريقة للمعادلات ذات الأنوية القابلة للفصل، والنواة القابلة للفصل هي التي يمكن التعبير عنها كمجموع عدد من الحدود المنتهية بحيث ان كل حد عبارة عن حاصل ضرب دالة في $x$ فقط ودالة في $t$ على النحو التالي:

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{n} g_i\,(x)h_i\,(t) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ 9$$

بتطبيق 9 في معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\,u(t)dt$$

ينتج

$$u(x) = f(x)\ + \lambda g_1(x) \int_a^b h_1\,(t)u(t) + \ \lambda g_2(x) \int_a^b h_2\,(t)u(t) + \cdots$$

$$+ \lambda g_n(x) \int_a^b h_n\,(t)u(t) \quad \dots\ \ 10$$

نظرًا لأن كل تكامل في الطرف الأيمن يعتمد فقط على المتغيّر $t$ مع حدود تكامل ثابتة بالنسبة لـ $t$، فإن هذا يعني أن كل تكامل يمثل مقدارًا ثابتًا. وبناءً على ذلك، تصبح المعادلة

$$\mathrm{u(x)} = \mathrm{f(x)} + \lambda\alpha_1 \mathrm{g_1(x)} + \lambda\alpha_2 g_2(\mathrm{x}) + \cdots + \lambda\alpha_n g_n(\mathrm{x}) \dots\dots\dots \quad 11$$

$$\propto_i \ = \int_a^b h_i(t)\,u(t)dt \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 12 \qquad \mathrm{i} \ \leq n$$

$\leq \ 0$ حيث

بتعويض المعادلة (11) في المعادلة (12) يعطى نظام مكوّن من $n$ معادلات جبرية يمكن حلّها لإيجاد القيم الثابتة $\alpha_i$، حيث $1 \leq i \leq n$. وباستخدام القيم العددية المحسوبة لـ $\alpha_i$ في المعادلة (11)، يمكن الحصول بسهولة على الحل $u(x)$ لمعادلة فريدهولم التكاملية.

**iv. طريقة التقريبات المتتالية**

هذه الطريقة تستخدم لحل مشاكل القيمة الابتدائية والمعادلات التكاملية. تقوم الطريقة بحل أي مسألة من خلال إيجاد تقريبات متتالية للحل بالبدء بتخمين أولي يُسمى $u_0(x)$، ويسمى التقدير الصفري، التقدير الصفري يمكن أن يكون أي دالة حقيقية مختارة، والتي تُستخدم في علاقة تكرارية لتحديد التقريبات الأخرى. أكثر القيم شيوعًا للتقدير الصفري هي 0 أو 1 أو $x$. يمكن اختيار قيم حقيقية أخرى أيضًا [3] . وتتلخص هذه الطريقة في فرض حل تقريبي ابتدائي $u_0(x)$ ثم التعويض بهذا الحل في المعادلة التكاملية للحصول على التقريب الأول للحل $u_1$ (x) ثم التعويض بهذا الأخير من جديد في المعادلة التكاملية، وهكذا.

$$\boldsymbol{u_{n+1}(x)} = \mathrm{f(x)} + \lambda \int_a^b K(x,t)u_n(t)dt, \qquad n \ \geq 0. \dots\dots\dots\dots\dots 13$$

ونتحصل على الحل المضبوط وهو

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1}(x)$$

نلاحظ انه إذا كانت $\lambda = 0$ في المعادلة (1) فإن $u(x) = f(x)$ هو حل وحيد لهذه المعادلة.

## 3. النتائج والمناقشة

### i. تطبيق طريقة التحليل لأدوميان

**مثال (1):** أوجد حل معادلة فريدهولم التكاملية الأتية

$$u(x) = \frac{9}{10}x^2 + \int_0^1 \frac{1}{2}x^2t^2u(t)dt$$

**الحل التحليلي:**

$$f(x) = \frac{9}{10}x^2 \qquad \lambda = 1 \qquad k(x,t) = \frac{1}{2}x^2t^2$$

بتطبيق المعادلات (3، 4) يكون لدينا

$$u_0(x) = f(x) = \frac{9}{10}x^2$$

$$u_1(x) = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2t^2u_0(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2t^2\left(\frac{9}{10}t^2\right)dt$$

$$= \frac{9}{20}x^2\int_0^1 t^4\,dt = \frac{9}{100}x^2$$

$$u_2(x) = \int_0^1 k(x,t)\,u_1(x)dt = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2t^2\left(\frac{9}{100}t^2\right)dt = \frac{9}{1000}x^2$$

وهكذا الى ان نتحصل على المتسلسلة التالية

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

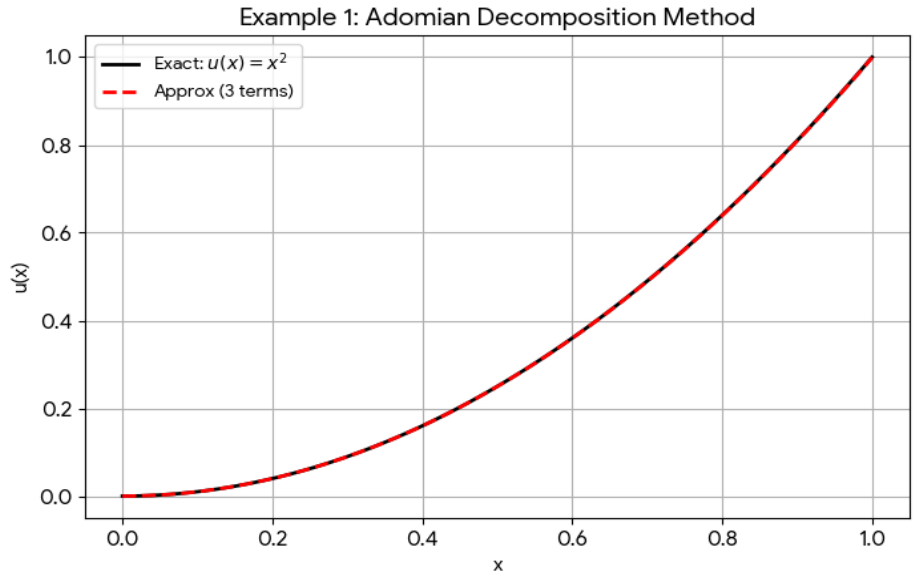
$$u(x) = \frac{9}{10}x^2 + \frac{9}{100}x^2 + \frac{9}{1000}x^2 = \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots\right)x^2$$

$$= x^2$$

هذه متسلسلة هندسية مجموعها يساوي 1، وبالتالي $\boldsymbol{u(x) = x^2}$.

باستخدام كود الماتلاب يعرض الرسم البياني في الشكل (1) منحنيين على الفترة من 0 إلى 1. المنحنى الأول (باللون الأسود) يمثل الحل المضبوط وهو دالة تربيعية $u(x) = x^2$ تبدأ من النقطة (0,0) وتنتهي عند (1,1). المنحنى الثاني (المتقطع باللون الأحمر) يمثل الحل التقريبي باستخدام أول 3 حدود من متسلسلة أدوميان. يلاحظ من الرسم التطابق شبه التام بين المنحنيين. رياضياً، مجموع أول ثلاثة حدود أعطى $u(x) = 0.999\,x^2$، وهو قريب جداً من المعامل 1. هذا التطابق البصري يؤكد ما أشارت إليه النتائج

من أن طريقة أدوميان توفر تقارباً سريعاً جداً نحو الحل المضبوط، وأن الخطأ يتضاءل بشكل أسي ليصبح من رتبة $10^{-n}$ مما يجعل الطريقة عالية الكفاءة حتى مع الاكتفاء بعدد قليل من الحدود.




**الشكل (1):** تطبيق طريقة التحليل لأدوميان.

### ii. طريقة التحليل المعدلة (Modified Decomposition Method)

**مثال (2):** اوجد حل معادلة فريدهولم التكاملية الاتية

$$u(x) = cosx + 2x + \int_0^{\pi} xt\, u(t)dt$$

الحل

$$f_1(x) = cosx \qquad f_2(x) = 2x$$

بتطبيق المعادلات (6، 7، 8) ينتج ان

$$u_0(x) = f_1(x) = cosx$$

$$u_1(x) = f_2(x) + \Lambda \int_a^b k(x,t)\, u_0(x)dt = 2x + \int_0^{\pi} xt\, u(t)dt$$

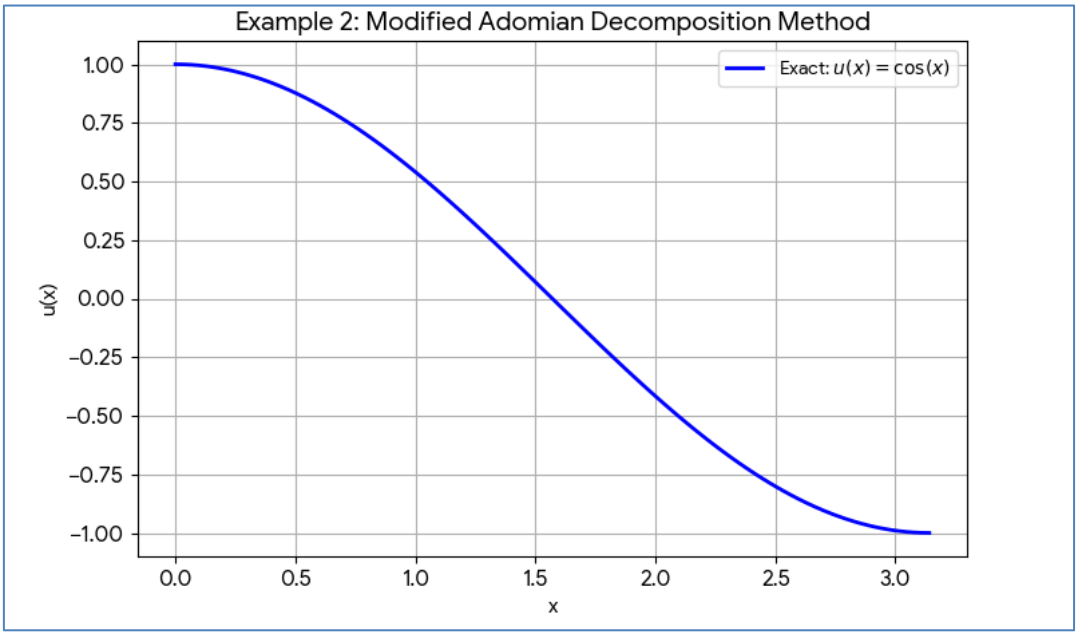
$$= 2x + x\{cost + tsin\, t\}_0^{\pi} = 0$$

بما ان $u_1(x) = 0$ فان $u_2(x), u_3(x)$ ستنعدم وبذلك يكون الحل هو

$$\boldsymbol{u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = cosx}$$

باستخدام كود الماتلاب يظهر الرسم البياني في الشكل (2) منحنى واحداً يمثل دالة جيب التمام= $u(x)$ $cosx$ على الفترة من 0 إلى $\pi$. يبدأ المنحنى من القيمة العظمى 1عند x=0، ويمر بالصفر عند $x = \frac{\pi}{2}$، ليصل إلى أدنى قيمة 1- عند $x = \pi$. في هذا المثال، لا يوجد فرق بين "الحل التقريبي" و"الحل

المضبوط". بفضل التجزئة للدالة $f(x)$ الى $f_1(x) = cosx$ و $f_2(x) = 2x$ ، انعدم الحد $u_1(x)$وتلاشت بالتالي جميع الحدود اللاحقة. المنحنى المرسوم يثبت أن طريقة التحليل المعدلة نجحت في اختزال الحسابات المعقدة والمتسلسلة اللانهائية إلى حل دقيق ومغلق من الخطوة الأولى.




**الشكل (2):** تطبيق طريقة التحليل المعدلة.

### iii. تحليل نتائج طريقة الحساب المباشر للنواة القابلة للفصل (Direct Method for Kernels Separable)

**مثال (3):** أوجد حل معادلة فريدهولم التكاملية التالية:

$$u(x) = -8x - 6x^2 + \int_0^1 (20xt^2 + 12x^2 t)u(t)\,dt$$

نواة المعادلة قابلة للفصل ومكونة من حدين لذلك عند تطبيق طريقة الحساب المباشر تكتب على الصورة

$$u(x) = -8x - 6x^2 + 20x\int_0^1 t^2\,u(t)\,dt + 12x^2\int_0^1 t\,u(t)\,dt$$

وبالتالي يكون لدينا ثابتين وتصبح المعادلة على الصورة

$$u(x) = -8x - 6x^2 + 20x \propto +12x^2\beta$$

$$u(x) = (20 \propto -8)x + (12\beta - 6)x^2 \ldots\ldots\ldots 14$$

$$\propto = \int_0^1 t^2\,u(t)dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 15$$

$$\beta = \int_0^1 t\,u(t)dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 16$$

بالتعويض في المعادلات [14، 15، 16] على التوالي ينتج

$$\propto = \int_0^1 t^2\ [(\ 20\alpha - 8)t + (12\beta - 6)t^2]\ dt$$

$$= (\ 20\alpha - 8) \int_0^1 t^3\, dt + (12\beta - 6) \int_0^1 t^4\, dt$$

$$= \frac{(\ 20\alpha - 8)}{4} + \frac{(12\beta - 6)}{5} =$$

$$5\alpha + 3\beta - 4 = 0$$

$$\beta = \int_0^1 t[(\ 20\alpha - 8)t + (12\beta - 6)t^2\, dt$$

$$= (\ 20\alpha - 8) \int_0^1 t^2\, dt + (12\beta - 6) \int_0^1 t^3\, dt$$

$$= \frac{(\ 20\alpha - 8)}{3} + \frac{(12\beta - 6)}{4} =$$

$$40\alpha + 12\beta - 25 = 0$$

$$5\alpha + 3\beta = 4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 17$$

$$40\alpha + 12\beta = 25 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 18$$

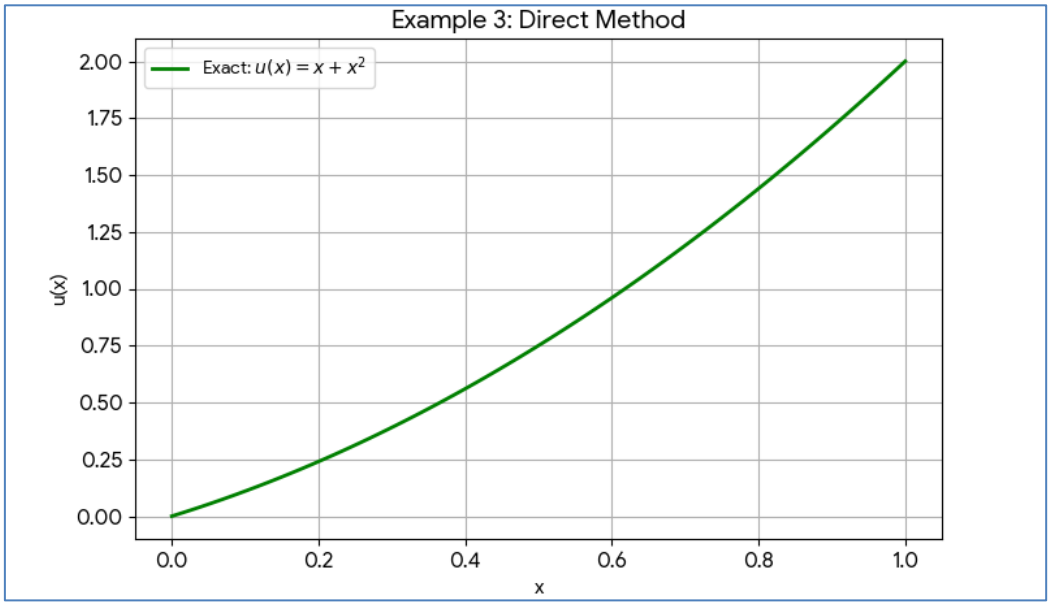
بحل المعادلتين الجبريتين (17، 18) أنيا نحصل على قيمتي $\propto, \beta$

$$\propto = \frac{9}{20} \quad , \quad \beta = \frac{7}{12}$$

بالتعويض في المعادلة (14) ينتج

$\boldsymbol{u(x) = x + x^2}$ وهو حل المعادلة التكاملية المعطاة.

باستخدام كود الماتلاب الرسم البياني في الشكل (3) يعرض منحنى الدالة $u(x) = x + x^2$ على الفترة من 0 إلى 1.




**الشكل (3):** تطبيق طريقة الحساب المباشر.

المنحنى يمثل دالة متزايدة بسلاسة تبدأ من النقطة (0,0) وتصل إلى النقطة (1,2)، وهو ناتج عن تراكب دالة خطية مع دالة تربيعية. هنا المنحنى يمثل الحل المضبوط. طريقة الحساب المباشر لا تعتمد على التقريب أو المتسلسلات، بل تقوم بتحويل المعادلة التكاملية ذات النواة القابلة للفصل إلى نظام من المعادلات الجبرية. المنحنى المرجعي يعكس الدقة التامة للحل المباشر، ويوضح أن الطريقة مثالية وفعالة جداً عندما تكون النواة مكونة من عدد محدود من الحدود المنفصلة.

**iv. طريقة التقريبات المتتالية**

**مثال (4):** اوجد حل المعادلة التكاملية باستخدام طريقة التقريبات المتتالية

$$u(x) = x + e^x - \int_0^1 xt\,u(t)dt$$

نفرض ان

$$u_0 = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 22$$

تسمح طريقة التقريبات المتتالية باستخدام صيغة التكرار التالية:

$$u_{n+1}(x) = x + e^x - \int_0^1 x u_n(t)\,dt \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 23$$

بتعويض 22 في23 نحصل على

$$u_1(x) = x + e^x - \int_0^1 xt\,u_0(t)dt = e^x + x$$

$$u_2(x) = x + e^x - \int_0^1 x\,tu_1(t)dt = e^x - \frac{1}{3}x$$

$$u_3(x) = x + e^x - \int_0^1 xt\,u_2(t)dt = e^x + \frac{1}{9}x$$

$$u_{n+1}(x) = x + e^x - \int_0^1 xtu_n(t)\,dt = e^x + \frac{(-1)^n}{3^n}x$$

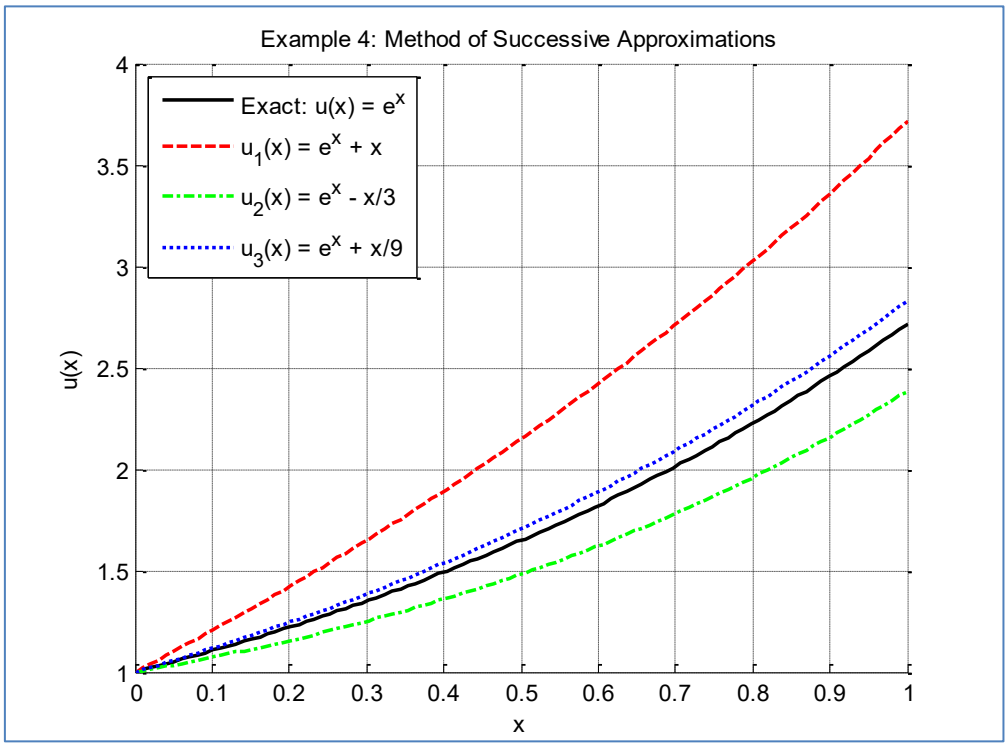
$$\boldsymbol{u(x) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1}(x) = e^x}$$

باستخدام كود الماتلاب يعرض الرسم البياني في الشكل (5) تطبيق "طريقة التقريبات المتتالية" لحل المعادلة التكاملية

$$u(x) = x + e^x - \int_0^1 xt\,u(t)dt$$

يوضح الرسم الحل المضبوط للمعادلة $\boldsymbol{u(x) = e^x}$ بخط متصل باللون الأسود على الفترة (0، 1). حيث يظهر الرسم أول ثلاث تقريبات تم التوصل إليها، حيث يمثل الخط الأحمر المتقطع التقريب الأول $u_1(x)$ والخط الأخضر (منقط ومتقطع) يمثل التقريب الثاني $u_2(x)$ بينما يمثل الخط الأزرق المنقط التقريب الثالث $u_3(x)$. حيث *نلاحظ وجود التقريب الأول* أعلى الحل المضبوط، ثم يهبط، التقريب الثاني ليقع أسفله، وليعود التقريب الثالث ويرتفع فوقه بمسافة قريبة جداً تكاد تكون متطابقة مع الحل الفعلي. يعود هذا

السلوك التذبذبي إلى وجود عامل متناوب $(-1)^n$ في صيغة الخطأ $\frac{(-1)^n}{3^n}x$. ويوضح الرسم أيضا كيف تتضاءل سعة هذا التذبذب بسرعة كبيرة (بمقدار الثلث في كل خطوة تكرارية) حتى تنطبق المتتالية تماماً على دالة الحل المضبوط.




**الشكل (5):** تطبيق طريقة التقريبات المتتالية.

**الخلاصة**

تمثل الطرق التحليلية المدروسة أدوات قوية في حل معادلات فريدهولم التكاملية، حيث يتفوق كل منها في سياق محدد؛ فتعتبر طريقة أدوميان الأكثر عمومية وسهولة في التطبيق، بينما تعد الطريقة المعدلة الأكثر كفاءة عند التعامل مع الدوال المركبة، في حين أن طريقة الحساب المباشر تتميز بأنها الأكثر دقة بالنسبة للنوى المنفصلة، بينما طريقة التقريبات المتتالية توفر نهجاً تكرارياً بديهياً يبدأ من تخمين ابتدائي بسيط ويقارب الحل تدريجياً عبر سلسلة من الخطوات المتتالية، وقد أظهر المثال المطبق كيف تتقارب المتتالية نحو الحل المضبوط عبر نمط تذبذبي مما يؤكد قدرة هذه الطريقة على الوصول إلى حل دقيق بعد عدد محدود من التكرارات. إن فهم مزايا وحدود كل طريقة يمكن الباحث من اختيار الأنسب لمشكلته، مما يوفر وقتاً وجهداً ويؤدي إلى نتائج دقيقة وموثوقة.

**المراجع**

[1] J. Jerri, Introduction to Integral Equations with Applications, John Wiley and Sons, INC, (1999).
[2] K. Atkinson, The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind, The press Syndicate of the University of Cambridge, United Kingdom, (1997).
[3] E.R. Love, The Electrostatic Field of Two Equal Circular Co-axial Conducting Discs, Quart J. Mech. Appl. Math. 2, 428-451, (1949).

[4] E. Hopf, Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge University Press, Cambridge, (1934).
[5] H.G. Kaper, R.B. Kellogg, Asymptotic Behavior of the Solution of the Integral Transport Equation in Slab Geometry, SIAM J. Appl. Math. 32, 191-200, (1971)
[6] N. Qatanani and I. Barghouthi, Numerical Treatment of the Two Dimensional Heat Radiation Integral Equation, Journal of Computational Analysis and Applications, Vol. 7, No. 3, 319-349, (2005).
[7] N. Qatanani , M. Schulz , Analytical and Numerical Investigation of Fredholm Integral Equation for the Heat Radiation Problem, Applied Mathematics and Computation, 175, pp.146-170, (2006)
[8] L. Kantorovich and G. Akilov, Functional Analysis in Normed Spaces, 2nd Edition, Pergamon Press, Translated from the Russian by Curtis Benster, (1982)
[9] P. Collins, Differential and Integral Equations, Oxford University Press Inc, NewYork, (2006).
[10] Muhammad Mujtaba Shaikh (2019), Analysis of Polynomial Collocation and Uniformly Spaced Quadrature Methods for Second Kind Linear Fredholm Integral Equations – A Comparison, Turkish Journal of Analysis and Number Theory. 2019, Vol. 7 No. 4, 91-97DOI: 10.12691/tjant-7-4-1.
[11] Abdul-Majid Wazwaz, Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications, Softcover, ISBN 10: 3642214509 / ISBN 13: 9783642214509, Publisher: Springer, 2012
[12] K. Atkinson, A Personal Perspective on the History of the Numerical Analysis of Fredholm Integral Equations of the Second Kind, The University of Iowa, July 25, (2008).
[13] A. Chakrabarti, S. Martha, Approximate Solutions of Fredholm Integral Equations of the Second kind, Applied Mathematics and Computation, 211, 459–466, (2009).
[14] F. Müller, W. Varnhorn, On Approximation and Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of Second Kind Using Quasi-Interpolation, Applied Mathematics and Computation 217, 6409-6416, (2011).

**Compliance with ethical standards**

*Disclosure of conflict of interest*

The authors declare that they have no conflict of interest.

**Disclaimer/Publisher's Note:** The statements, opinions, and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and not of **JLABW** and/or the editor(s). **JLABW** and/or the editor(s) disclaim responsibility for any injury to people or property resulting from any ideas, methods, instructions, or products referred to in the content.