Journal of Libyan Academy Bani Walid 2026
مجلة الأكاديمية الليبية بني وليد
e-ISSN: 3104-3860
Volume 2, Issue 2, 2026, Pages: 255-266
Website: https://journals.labjournal.ly/index.php/Jlabw/index

Applications of Laguerre Polynomials in Second-Order Differential Equations and Some of Their Applications

Turkiya A. Aljamal *
Department of Mathematics, Faculty of Education, Bani Waleed University, Libya.
*Email: trk8828@gmail.com

استخدامات متعددة حدود لاجير في المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية وبعض تطبيقاتها

تركية الجمل*
قسم الرياضيات، كلية التربية، جامعة بني وليد، ليبيا

Received: 18-01-2026	**Accepted:** 25-03-2026	**Published**: 08-04-2026

Abstract
In this research, Laguerre polynomials were studied as one of the orthogonal functions that play a fundamental role in solving second-order differential equations. They are also considered among the important orthogonal functions with significant applications in approximation theory. Laguerre polynomials are regarded as functions that were developed based on certain physical phenomena related to second-order differential equations. Furthermore, this research includes the study of their definition, properties, and some of their applications.

Keywords: Laguerre Polynomials – Second-Order Differential Equations – Generating Function – Rodrigues Formula.

الملخص
في هذا البحث تمت دراسة متعددة حدود لاجير باعتبارها من الدوال المتعامدة التي تلعب دورًا أساسيًا في حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية، كما تُعد من الدوال ذات التطبيقات المهمة في نظرية التقريب. وتعتبر متعددة حدود لاجير من الدوال التي تم تطويرها اعتمادًا على بعض الظواهر الفيزيائية المرتبطة بالمعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية. كذلك تناول هذا البحث تعريف متعددة حدود لاجير وخصائصها الأساسية، بالإضافة إلى دراسة بعض تطبيقاتها المختلفة.

الكلمات المفتاحية: متعددة حدود لاجير - المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية - الدالة المولدة – صيغة رودريج .

المقدمة:

تُعد متعددة حدود لاجير من أهم الدوال الخاصة في الرياضيات التطبيقية، حيث تحتل مكانة بارزة في دراسة المعادلات التفاضلية والفيزياء الرياضية، لما تمتلكه من خصائص رياضية مميزة تساعد في تحليل العديد من الظواهر الطبيعية والهندسية. وتنتمي متعددة حدود لاجير إلى عائلة الدوال المتعامدة التي ظهرت نتيجة دراسة حلول بعض المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية، وتحديدًا معادلة لاجير التفاضلية.

وتظهر أهمية متعددة حدود لاجير بصورة واضحة في العديد من التطبيقات العلمية، خاصة في ميكانيكا الكم، إذ تستخدم في حل معادلة شرودنغر الخاصة بذرة الهيدروجين، كما تدخل في مسائل التحليل العددي ونظرية التقريب والفيزياء الذرية والبصريات الرياضية. ويرجع ذلك إلى امتلاكها خواص التعامد والعلاقات التكرارية التي تسهل بناء الحلول الرياضية للعديد من المسائل المعقدة.

وتُعرف معادلة لاجير التفاضلية بالشكل:

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

وحلول هذه المعادلة هي متعددة حدود لاجير، والتي يمكن تعريفها باستخدام صيغة رودريج:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$$

كما تمتاز متعددة حدود لاجير بخاصية التعامد بالنسبة للدالة الوزنية e^{-x}، الأمر الذي يجعلها ذات أهمية كبيرة في توسيع الدوال وتمثيلها على شكل متسلسلات متعامدة.

وفي هذا البحث سيتم دراسة متعددة حدود لاجير من حيث تعريفها وخصائصها الأساسية، والدالة المولدة الخاصة بها، وصيغة رودريج، وعلاقات التعامد والعلاقات التكرارية، بالإضافة إلى دراسة دالة لاجير المساعدة وبعض التطبيقات المرتبطة بها في المعادلات التفاضلية والفيزياء الرياضية .

مشكلة البحث

تكمن مشكلة البحث في دراسة متعددة حدود لاجير باعتبارها من أهم الدوال المتعامدة المستخدمة في حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية، حيث إن العديد من التطبيقات الرياضية والفيزيائية تعتمد عليها في بناء الحلول التحليلية والتقريبية للمعادلات المعقدة. وعلى الرغم من أهمية هذه الدوال، إلا أن خصائصها الرياضية وتطبيقاتها لا تزال تحتاج إلى توضيح وربط أكبر بالجوانب التطبيقية المختلفة.

أهداف البحث

يهدف هذا البحث إلى:

1. التعرف على مفهوم متعددة حدود لاجير وخصائصها الأساسية .
2. دراسة معادلة لاجير التفاضلية وحلولها .
3. اشتقاق بعض المبرهنات المرتبطة بصيغة رودريج والدالة المولدة .
4. دراسة علاقات التعامد والعلاقات التكرارية لمتعددة حدود لاجير .
5. توضيح دور متعددة حدود لاجير في حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية .
6. عرض بعض التطبيقات الفيزيائية والرياضية المتعلقة بها .

أهمية البحث

تظهر أهمية البحث في أن متعددة حدود لاجير تعد من أهم الدوال الخاصة المستخدمة في الرياضيات التطبيقية والفيزياء الرياضية، حيث تدخل في:

- ميكانيكا الكم .
- التحليل العددي .

- نظرية التقريب .
- المعادلات التفاضلية الجزئية .
- النمذجة الرياضية للأنظمة الفيزيائية .

كما تسهم دراسة هذه الدوال في تبسيط العديد من النماذج الرياضية المستخدمة في العلوم والهندسة.

منهجية البحث

اعتمد هذا البحث على المنهج التحليلي الرياضي، وذلك من خلال دراسة التعريفات الأساسية لمتعددة حدود لاجير وتحليل خصائصها الرياضية وإثبات بعض المبرهنات المرتبطة بها باستخدام الأساليب الرياضية المعروفة، بالإضافة إلى دراسة تطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية وبعض التطبيقات الفيزيائية.

ومن اهم الدوال الخاصة في الرياضيات، حيث تلعب دورا بارزا في العديد من التطبيقات وحاصة مجالت الفيزياء وتستخدم في ميكانيكا الكم لوصف سلوك الجسيمات على المستوي الذري وتظهر بشكل اساسي في حل بعض المعادلة التفاضلية

حيث أن معادلة لاجير التفاضلية تعرف كالاتي:

$$xy'' + (1+x)y' + ny = 0 \quad , \; 0 \le x \le \infty \qquad (1)$$

ويمكن كتابتها بالشكل الاتي:

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right) + ne^{-x}y = 0 \quad , \; 0 \le x \le \infty \qquad (2)$$

وحلول معادلة لاجير بطريقه فروبنيوس هي متعددة حدود لاجير $L_n(x)$ وتكون على الصورة:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n!) x^k}{(k!)^2 (n-k)!} \qquad (3)$$

وبوضع $n = 0,1,2,3, ...$ نحصل علي الحالات الخاصة لمتعددة حدود لاجير:

$$L_0(x) = 1$$
$$L_1(x) = 1 - x$$
$$L_2(x) = \frac{1}{2!}(2 - 4x + x^2)$$
$$L_3(x) = \frac{1}{3!}(6 - 18x + 9x^2 - x^3)$$

.
.
.

وأن هده الدوال لست زوجية أو فردية لأي

مبرهنة 1: (صيغة رودريج)

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^x) \;\rightarrow\quad 4$$

البرهان:

لاثبات صيغة رودريج (4) نستخدم قاعدة الازاحة والمفكوك كالاتشي :

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = D^n(x^n e^{-x}) = e^{-x}(D-1)^n(x^n), \quad D = \frac{d}{dx}$$

$$= e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k D^{n-k}\,(x^n) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!\,(n-k)!}D^{n-k}(x^{n)}$$

$$= e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k (n!)^2\, x^k}{(k!)^2(n-k)!}e^{-x-k}n!\,L_n(x)$$

$$\therefore L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

بالصيغة التالية والتي تعرف بصيغة رودريج$L_n(x)$ تتعين متعددة لاجير

مبرهنة 2: "الدالة المولدة " على الصورة

$$\frac{\exp\{-xt/1-t)}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n \qquad (5)$$

البرهان

حيث إن

$$\frac{1}{1-t}\exp\{-xt/1-t\} = \frac{1}{1-t}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}(-\frac{xt}{1-t})^r\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}(\frac{x^r t^r}{(1-t)^{r+1}})$$

لكن

$$\frac{1}{(1-t)^{r+1}} = 1 + (r+t)t + \frac{(r+1)(r+2)}{2!}t^2 + \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!}t^3 + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r+k)!}{k!\,r!}t^k\,, |t|< 1$$

وعليه نحصل على الاتي:

$$\frac{1}{1-t}\exp\{-xt/1-t\} = \sum_{r,k=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(r+k)!}{(r!)^2 k!}x^r t^{r+k} \qquad (6)$$

بوضع $r+k=0$ t^n يمكن الحصول على معامل r لأي قيمة ثابتة لـــــــ

وعليه يكون معامل t^n في مفكوك المعادلة (5) كالاتي :

$$(-1)^r\frac{n!}{(r!)^2(n-k)!}x^r$$

ومن ذلك يمكن الحصول على العلاقة :

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{n!}{(r!)^2(n-k)!}x^r$$

مبرهنة (3)

$$\text{(i)}\quad L_n(0) = 1$$
$$\text{(ii)}\quad L'_n(0) = -n$$

البرهان

بما أن

$$\frac{1}{1-t} = \exp\{-xt/1-t\} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

إذا بوضع x=0 نحصل على:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(0)\,t^n \quad ,|t|< 1$$

باستخدام مفكوك ماكوين في الطرف الأيسر نحصل على:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \quad ,|t|< 1$$

وعليه نجد أن:

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(0)\,t^n \quad ,|t|< 1$$

بأخذ معاملات t^n للطرفين نحصل على العلاقة (i) .

وللحصول على العلاقة (ii) نستخدم معادلة لاجير العامة:

$$x\frac{d^2}{dx^2}L_n(x) + (1-x)\frac{d}{dx}L_n(x) + nL_n(x) = 0$$

ونضع x=0 فنحصل على $\quad L'_n(0) + nL_n(0) = 0$

باستخدام العلاقة (i) نحصل على $\quad L'_n(0) = -n$

وبنفس الطريقة يمكن أن نبرهن

$$L''_n(0) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

وذلك بالتفاضل مرتين للدالة المولدة فنحصل على العلاقة:

$$\frac{1}{1-t}e^{\frac{-xt}{1-t}}.\left[\frac{-t}{1-t}\right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} L''_n(x)t^n$$

بوضع x=0 فنحصل على الاتي:

$$\frac{t^2}{(1-t)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} L''_n(0)t^n$$

باستخدام مفكوك ما كلورين في الطرف الايسر نجد أن:

$$t^2\left\{1 + 3t + \frac{3.4}{2!}t^2 + \frac{3.4.5}{3!}t^3 + \cdots + \frac{3.4.5\cdots n}{(n-2)!}t^{n-2} + \cdots\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} L''_n(0)t^n$$

بمطابقة معاملات قوي t^n نجد أن :

$$L_n''(0) = \frac{3.4.5 \cdots n}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

2-علاقات التعامد لمتعددة حدود لاجير

مبرهنة (1)

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm} \qquad (7)$$

البرهان

من مبرهنة الدالة المولدة، يمكن كتابة:

$$\frac{\exp\{-xt/1-t\}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n, \frac{\exp\{-xt/1-s\}}{1-t} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x) s^m$$

وعليه نحصل على

$$\frac{1}{(1-t)(1-s)} \exp\left\{\frac{-xt}{1-t}\right\} \exp\left\{\frac{-xs}{1-s}\right\} = \sum_{n,m} L_n(x) L_m(x) t^n s^m$$

بضرب الطرفين في الدالة e^{-x} ثم نكامل ينتج الاتي :

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} t^n s^m \int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 1 \qquad (8)$$

وعليه يمكن القول أن $\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx$ يمثل معامل $t^n s^m$ في التكامل I حيث:

$$I = \int_0^\infty e^{-x} \frac{\exp\{-xt/1-t\}}{1-t} . \frac{\exp\{-xs/1-s\}}{1-s} dx$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \int_0^\infty \exp[-x] . \exp\left[\frac{-xt}{1-t}\right] . \exp\left[\frac{-xs}{1-s}\right] dx$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \int_0^\infty \exp\left\{-x\left[1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}\right]\right\} dx$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \left[\frac{1}{1 + \{t/(\mathrm{I}-\mathrm{t})\} + \{\mathrm{s}/(\mathrm{I}-\mathrm{s})\}} \exp\left\{-x\left[1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}\right]\right\}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-s)} . \frac{1}{\frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}}$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-s)+t(1-s)+s(1-t)} = \frac{1}{1-st} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n t^n \,, |st| < 1$$

وعليه تكون العلاقة (8)كالاتي:

$$t^n s^m \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = t^n s^m$$

ومن ثم إذا كان $n \neq m$ نجد أن:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 0 \qquad (9)$$

أما إذا $n = m$ فإن :

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \{L_n(x)\}^2 dx = 1 \qquad (10)$$

وهذه العلاقة يمكن الاستفادة منها بتمثيل أي دالة على شكل متعددة حدود الاجير كالاتي : لتكن f(x) معرفة القيم X ، وعليه يمكن كتابة :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n L_n(x)$$

بتطبيق قاعدة التعامد نجد أن :

$$A_n = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) L_n(x) dx \qquad (11)$$

3- العلاقات التكرارية لدالة لاجير

متعددة حدود لاجير $L_n(x)$ تحقق العلاقات التكرارية الاتية :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \qquad (12)$$

$$L_{n-1}(x) = L'_{n-1}(x) - L'_n(x) \qquad (13)$$

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x) \qquad (14)$$

4- دالة لاجير المساعد

يطلق على المعادلة التفاضلية

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (k+1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0 \qquad (15)$$

معادلة لاجير المساعدة.أما إذا كانت $K=0$ فكما سبق تسمى معادلة لاجير ، والتي حلها $y = L_n(x)$.بينما يعطي حل المعادلة بالبرهنة التالية:

مبرهنة (1)

إذا كان $z\,(x\,,\,s)$ حلا لمعادلة لاجير

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + (n+k)y = 0\,, \qquad 0 \le x < \infty \qquad (16)$$

فإن $\frac{d^k z}{dx^k}$ تحقق معادلة لاجير المساعدة .

البرهان

بما أن z (x , s) حل للمعادلة (16) إذا

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dz}{dx}+(n+k)z=0$$

بالتفاضل من المرات مع تطبيق نظرية ليبنز كالاتي:

$$[x\frac{d^2z}{dx^2}^{(k)}+\left[(1-x)\frac{dz}{dx}\right]^{(k)}+(n+k)z^{(k)}=0$$

حيث (k) ترمز إلى المشتقة التفاضلية من الرتبة k.وعليه نحصل على:

$$xz^{(k+2)}+kz^{(k+1)}+(1-x)z^{(k+1)}-kz^{(k)}+(n+k)z^{(k)}=0$$

بالاختصار نصل إلى الاتي:

$$xz^{(k+2)}+(k+1-x)z^{(k+1)}+nz^{(k)}=0$$

وواضح أن المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة:

$$x\frac{d^2}{dx^2}z^{(k)}+(k+1-x)\frac{d}{dx}z^{(k)}+nz^{(k)}=0$$

وعليه ينتج أن $z^{(k)}$ تحقق المعادلة المطلوبة.

مما سبق يتضح لنا أنه كانت $L_n(x)$ تحقق معادلة لاجير فإن $\frac{d}{dx^k}^{k} L_{n+k}(x)$ تحقق معادلة لاجير المساعدة، ومن ثم يمكن تعريف $L_n^k(x)$ كالاتي:

$$L_n^k(x)=(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x)\qquad (k<n)\qquad (17)$$

وهي ما تسمى بدالة لاجير المساعدة.

مبرهنة(2)

$$L_n^k(x)=\sum_{r=0}^{n}(-x)^r\frac{(n+k)!\,x^r}{(n-r)!\,(k+r)!\,r!}\qquad (18)$$

البرهان

فيما سبق أثبتنا أن :

$$L_n(x)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!\,x^r}{(n-r)!\,(r!)^2}$$

وعليه بتحريك كل n بالمقدار $n+k$ نحصل على الاتي :

$$L_{n+k}(x)=\sum_{r=0}^{n+k}(-1)^r\frac{(n+k)!\,x^r}{(n+k-r)!\,(r!)^2}\qquad (19)$$

باستخدام العلاقة (17) نحصل على :

$$L_n^k(x)=(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\sum_{r=0}^{n+k}(-1)^r\frac{(n+k)!\,x^r}{(n+k-r)!\,(r!)^2}$$

نلحظ أن جميع التفاضلات التي فيها $r < k$ تنعدم ، لان القوى الخاصة بها أقل من رتبة التفاضل ، لذلك نكتب المعادلة الأخيرة على الصورة :

مبرهنة (3)

الدالة المولدة لدالة لاجير المساعدة تأخذ الشكل :

$$\frac{\exp\{-xt/1-t\}}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x)t^n \qquad (20)$$

مبرهنة(4)

علاقة التعامد لدالة لاجير المساعدة :

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^k L_m^k(x)dx = \frac{(n+k)!}{n!}\delta_{nm} \qquad (21)$$

5-علاقات تكرارية لدالة لاجير المساعدة

بعض المبرهنات عن العلاقات التكرارية لدالة لاجير المساعدة.

مبرهنة (1)

$$L_{n-1}^k(x) + L_n^{k-1}(x) = L_n^k(x) \qquad (22)$$

مبرهنة (2)

$$(n+1)L_{n+1}^k(x) = (2n+k+1-x)L_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x) \qquad (23)$$

مبرهنة (3)

$$x\frac{d}{dx}L_n^k(x) = nL_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x) \qquad (24)$$

مبرهنة (4)

$$\frac{d}{dx}L_n^k(x) = -\sum_{r=0}^{n-1} L_n^k(x) \qquad (25)$$

مبرهنة (5)

$$\frac{d}{dx}\left(L_n^k(x)\right) = -L_{n-1}^{k+1} \qquad (26)$$

مبرهنة (6)

$$L_n^{k+1}(x) = \sum_{r=0}^{n} L_r^k(x) \qquad (27)$$

ملحوظة هامة:في كثير من الكتب الدراسية للدوال الخاصة نلحظ أن دالة لاجير تعرف على الصورة:

$$\frac{1}{(1-t)}\exp\left\{\frac{-xt}{1-t}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

وعليه يكون:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}\ell_n(x)$$

مثال (1) : أثبت أن

$$\int_{t}^{\infty} e^{-x}\, L_n^k(x)dx = \quad e^{-t}\left[\quad L_n^k(t) - L_{n-1}^k(t)\right] \quad (28)$$

الإثبات بتكامل الطرف الأيسر بالمتجزئ

$$I = \left[-e^{-x}L_n^k(x)\right]_t^{\infty} - \int_{t}^{\infty} (-e^{-x})L_n^{k'}(x)dx$$

$$= e^{-t}L_n^k(t) + \int_{t}^{\infty} e^{-x}L_n^{k'}(x)dx$$

باستخدام العلاقة (25) نجد أن:

$$I = e^{-t}L_n^k(t) - \int_{t}^{\infty} e^{-x}\{\sum_{r=0}^{n-1} L_r^k(x)\}\, dx = e^{-t}L_n^k(t) - \sum_{r=0}^{n-1}\int_{t}^{\infty} e^{-x}L_r^k(x)dx$$

بالتعويض عن قيمة I من المعادلة (28) نجد أن:

$$\int_{t}^{\infty} e^{-x}L_n^k(x)dx + \sum_{r=0}^{n-1}\int_{t}^{\infty} e^{-x}L_r^k(x)dx = e^{-t}L_n^k(t)$$

بجمع الطرف الأيسر نحصل على :

$$\sum_{r=0}^{n}\int_{t}^{\infty} e^{-x}L_r^k(x)dx = e^{-t}L_n^k(t) \; (29)$$

وحيث إن:

$$e^{-x}L_n^k(t) = \sum_{r=0}^{n} e^{-x}\, L_r^k(x) - \sum_{r=0}^{n-1} e^{-x}L_r^k\,(x)$$

إذا

$$\int_{t}^{\infty} e^{-x}\, L_n^k(x)dx = \sum_{r=0}^{n}\int_{t}^{\infty} e^{-x}\, L_r^k(x)dx - \sum_{r=0}^{n-1}\int_{t}^{\infty} e^{-x}\, L_r^k(x)dx$$

وباستخدام العلاقة (29) نحصل على :

$$\int_{t}^{\infty} e^{-x}\, L_n^k(x)dx = e^{-t}L_n^k(t) - e^{-t}L_{n-1}^k(t) = e^{-t}\{L_n^k(t) - L_{n-1}^k(t)\}$$

مثال (2) : أثبت أن

$$J_m\{2\sqrt{xt}\} = e^{-t}(xt)^{\frac{m}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^m(x)t^n}{(n+m)!}$$

حيث $J_m(y)$ دالة بيسل من النوع الاول والرتبة m.

الاثبات من تعريف دالة بيسل نجد أن :

$$J_m\{2\sqrt{xt}\} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\,(m+r)!}\left\{\frac{2\sqrt{xt}}{2}\right\}^{2r+m}$$

بضرب طرفي المعادلة السابقة في $e^t (xt)^{\frac{-m}{2}}$نجد أن

$$e^t (xt)^{\frac{-m}{2}} J_m\{2\sqrt{xt}\} = e^t (xt)^{\frac{-m}{2}} \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\,(m+r)!}\{xt\}^{r+\frac{m}{2}}$$

$$= e^t \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\,(m+r)!}\{xt\}^r$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{t^s}{s!}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\,(m+r)!}x^r t^r$$

وعلية نحصل علي :

$$e^t (xt)^{\frac{-m}{2}} J_m\{2\sqrt{xt}\} = \sum_{r,s=0}^{\infty}(-1)^r \frac{x^r t^{r+s}}{r!\,(m+r)!\,s!}$$

لايجاد الطرف الايمن في قوى t^n نأخذ $s + r = n$ تحت الشرط $r \le n$ فنجد أن

$$e^t (xt)^{\frac{-m}{2}} J_m\{2\sqrt{xt}\} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{x^r t^n}{r!\,(m+r)!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{1}{(m+n)!} L_n^m(x)$$

النتائج

توصل البحث إلى عدة نتائج مهمة، من أبرزها:

1. أن متعددة حدود لاجير تمثل أحد أهم أنواع الدوال المتعامدة .
2. أن صيغة رودريج والدالة المولدة تساعدان في اشتقاق معظم خصائص متعددة حدود لاجير .
3. أن علاقات التعامد والعلاقات التكرارية تسهم في تبسيط الحلول الرياضية .
4. ارتباط متعددة حدود لاجير بعدد كبير من التطبيقات الفيزيائية والرياضية .
5. إمكانية استخدام هذه الدوال في حل العديد من المعادلات التفاضلية المعقدة .

التوصيات

يوصي البحث بما يلي:

1. التوسع في دراسة الدوال الخاصة وعلاقاتها بالمعادلات التفاضلية .
2. دراسة التطبيقات الحديثة لمتعددة حدود لاجير في الفيزياء الرياضية .
3. استخدام البرمجيات الرياضية الحديثة في تمثيل وتحليل هذه الدوال .
4. إجراء دراسات مقارنة بين متعددة حدود لاجير وبقية الدوال المتعامدة .
5. توظيف متعددة حدود لاجير في مسائل النمذجة الرياضية والتحليل العددي .

الخاتمة

في ختام هذا البحث تم دراسة متعددة حدود لاجير باعتبارها من أهم الدوال الخاصة المستخدمة في الرياضيات التطبيقية، حيث تم عرض تعريفها وخصائصها الأساسية وبعض المبرهنات المرتبطة بها، بالإضافة إلى دراسة علاقات التعامد والعلاقات التكرارية الخاصة بها، ودراسة دالة لاجير المساعدة وبعض تطبيقاتها الرياضية والفيزيائية. وقد تبين من خلال الدراسة أن متعددة حدود لاجير تمثل أداة رياضية مهمة تسهم في حل العديد من المعادلات التفاضلية والنماذج الفيزيائية المختلفة.

المراجع

1- أ.د. عفاف أبو الفتوح صالح ,المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها دار الفكر العربي 2010 م

2-أ.د. فالح بن عمران بن محمد الدوسري، أ.د محمد عبد اللاه بن أحمد عبده ,الدوال الخاصة وبعض تطبيقاتها –مكة المكرمة ,2011 م(1432ه)

3-إيرل د. رانفيل ،فيليب أ. بيدبنت المعادلات التفاضلية الاولية دار الكتب الوطنية 1992

4-الزوام دلة ,عمر عاشور ,محمد عريبي ,الدوال الخاصة. 2003 ,

5- مواري شبيجل ,الرياضيات المتقدمة للمهندسين والعلميين 1971 ,

6-Larry C. Andrews, Special Function For Engineers and Applied mathematicians, Macmillan publishing company, New York, 1985

7- Farrell and Ross , Solved problems gamma and beta , The Macmillan company , New York , 1963

8- Mahmoud M. El-Borai, Wagdy G. Elsayed, Turkiya Alhadi, Aljamal 'Synchronization and Impulsive Control of Some Parabolic Partial DifferentialEquations, American Journal of Theoretical and Applied Statistics, 2017; 6(5-1): 30-39

9- Turkiya A. Aljamal.Some properties of Synchronization and Fractional Equations, Journal of Educational, ISSN 2011-421X,No22(2023)

.

Compliance with ethical standards

Disclosure of conflict of interest

The authors declare that they have no conflict of interest.