

The Mu'azu–Bayawa Integral Transform for Some Bessel Functions**Abdulah Matug Mohamed Lahwal¹, Fatima Bashir Mohamed Arhoma^{2*}**^{1,2} Department of Mathematics, Faculty of Education – Al-Khoms, Elmergib University, Libya*Email: f.b.arhuma@elmergib.edu.ly**تحويل موعازو- باياوا التكاملية لبعض دوال بيسل**عبدالله معتوق محمد الأحول¹، فاطمة بشير محمد ارحومة^{2*}
^{1,2} قسم الرياضيات، كلية التربية – الخمس، جامعة المرقب، ليبيا.

Received: 10-05-2026	Accepted: 05-07-2026	Published: 22-07-2026
	Copyright: © 2026 by the authors. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).	

Abstract

In this research, the Mu'azu–Bayawa integral transform was derived and mathematically analyzed in detail, applying it to a selected set of Bessel functions of the first and second kind. The results show that this transform reduces the complexity of these functions into simpler integral forms, facilitating their handling in applied problems. Various applications of this transform were also included, such as evaluating certain complex integrals that are difficult to solve by traditional methods, where closed-form values were obtained using the transform's properties.

Furthermore, the Mu'azu–Bayawa integral transform was successfully used to find analytical solutions to some ordinary differential equations with variable coefficients, which often appear in mathematical modeling of physical and engineering phenomena such as heat transfer and mechanical vibrations. The results demonstrated the effectiveness of this transform in simplifying the equations and converting them into algebraic equations that are easy to solve, followed by returning to the original domain using the inverse transform. This research opens new horizons for using non-conventional integral transforms in applied mathematics and theoretical physics, with the possibility of generalizing the method to other special functions.

Keywords: Mu'azu–Bayawa integral transform, Bessel functions, integral evaluation, ordinary differential equations, variable coefficients, applied mathematics.

المخلص

في هذا البحث، تم استنتاج تحويل موعازو- باياوا التكاملية (Mu'azu–Bayawa integral transform) وتحليله الرياضي بدقة، حيث طُبّق على مجموعة مختارة من دوال بيسل من النوع الأول.

والثاني. أظهرت النتائج أن التحويل المذكور يختزل تعقيد هذه الدوال إلى صيغ تكاملية أبسط، مما يسهل التعامل معها في المسائل التطبيقية. كما تم تضمين تطبيقات متنوعة لهذا التحويل، منها حساب بعض التكاملات المعقدة التي يصعب حلها بالطرق التقليدية، حيث تم الحصول على قيم مغلقة لتلك التكاملات باستخدام خواص التحويل.

إضافة إلى ذلك، تم استخدام تحويل موعازو-باياوا التكاملي بنجاح في إيجاد الحلول التحليلية لبعض المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات غير الثابتة، والتي تظهر غالباً في النمذجة الرياضية للظواهر الفيزيائية والهندسية مثل انتقال الحرارة والاهتزازات الميكانيكية. وقد أظهرت النتائج فعالية هذا التحويل في تبسيط المعادلات وتحويلها إلى معادلات جبرية يسهل حلها، ثم الرجوع إلى الأصل باستخدام معكوس التحويل. يفتح هذا البحث أفقاً جديدة لاستخدام التحويلات التكاملية غير التقليدية في مجالات الرياضيات التطبيقية والفيزياء النظرية، مع إمكانية تعميم الطريقة على دوال خاصة أخرى.

الكلمات المفتاحية: تحويل موعازو-باياوا التكاملي، دوال بيسيل، حساب التكاملات، المعادلات التفاضلية العادية، معاملات غير ثابتة، الرياضيات التطبيقية.

المقدمة

يُعد مفهوم التحويلات التكاملية من المفاهيم الرياضية المهمة التي ظهرت منذ فترة طويلة، وقد لعب دوراً أساسياً في تطوير العديد من فروع الرياضيات التطبيقية والفيزياء والهندسة. تعتمد فكرة التحويل التكاملي على تحويل الدوال من مجال إلى آخر بهدف تبسيط العمليات الرياضية المعقدة، ولاسيما المعادلات التفاضلية والتكاملية. ومن أشهر هذه التحويلات تحويل لابلاس وتحويل فورييه اللذان استُخدما بصورة واسعة في معالجة الإشارات، وتحليل الأنظمة الديناميكية، ودراسة انتقال الحرارة، والاهتزازات، والدوائر الكهربائية، وميكانيكا الكم، والعديد من التطبيقات العلمية الأخرى.

لقد ساهمت التحويلات التكاملية في توفير أدوات فعالة لتحويل المعادلات التفاضلية الجزئية والعادية إلى معادلات جبرية أبسط، الأمر الذي أدى إلى تسهيل إيجاد الحلول الدقيقة والتقريبية لكثير من المسائل الفيزيائية والهندسية. كما أن لهذه التحويلات أهمية كبيرة في دراسة النماذج الرياضية التي تصف الظواهر الطبيعية المختلفة، إذ يمكن بواسطتها تحليل سلوك الأنظمة المعقدة والتنبؤ بنتائجها بدقة عالية.

في العقود الأخيرة ازداد اهتمام الباحثين بتطوير أنواع جديدة من التحويلات التكاملية بهدف التغلب على بعض القيود المرتبطة بالتحويلات التقليدية، وتقديم طرق أكثر كفاءة ومرونة في حل المسائل الرياضية المختلفة. وقد أثبتت هذه التحويلات الحديثة فاعليتها في معالجة العديد من التطبيقات العلمية والهندسية، مما أدى إلى ظهور عدد كبير من الدراسات والأبحاث في هذا المجال. ومن بين هذه التحويلات الحديثة: تحويل زاكي التكاملي [23,12]، وتحويل عبود التكاملي [12,1]، وتحويل كمال التكاملي [15,5,4,3,2]، وتحويل محجوب التكاملي [17,6]، وتحويل ساوي التكاملي [20,14,8,7]، وغيرها من التحويلات التي ساهمت في توسيع نطاق استخدام التحويلات التكاملية في العلوم التطبيقية.

وتُعد دوال بيسيل من الدوال الخاصة المهمة في الرياضيات التطبيقية، حيث تظهر بصورة طبيعية في حل كثير من المسائل الفيزيائية والهندسية التي تتميز بالتماثل الأسطواني أو الكروي، مثل مسائل انتقال الحرارة، وانتشار الموجات، والاهتزازات الميكانيكية، والكهرومغناطيسية، وميكانيكا الموائع. وقد سميت هذه الدوال نسبة إلى العالم الألماني فريدريش بيسيل، وتُستخدم بصورة واسعة في النمذجة الرياضية للعديد من الظواهر الطبيعية.

إن دراسة التحويلات التكاملية المرتبطة بدوال ببسيل تُعد من الموضوعات المهمة في الرياضيات التطبيقية، وذلك لما توفره من أدوات فعالة في تبسيط العمليات الرياضية المتعلقة بالمعادلات التفاضلية والتكاملية التي تحتوي على هذه الدوال. وقد اهتم الباحثون في السنوات الأخيرة بدراسة صور التحويلات التكاملية المختلفة لدوال ببسيل، وتطبيقها في حل المشكلات العلمية المتنوعة.

يهدف هذا البحث إلى تقديم تحويل موعازو - باياوا التكاملية لبعض دوال ببسيل، مع دراسة أهم خصائص هذا التحويل وبيان دوره في تبسيط الحلول الرياضية للمعادلات التفاضلية ذات المعاملات غير الثابتة. كما يهدف البحث إلى توضيح كيفية استخدام هذا التحويل في إيجاد حلول بعض المعادلات التفاضلية التي تظهر في التطبيقات الفيزيائية والهندسية، بالإضافة إلى استخراج بعض التكاملات التي تحتوي على دوال ببسيل.

وتكمن أهمية هذا البحث في كونه يضيف أداة رياضية جديدة يمكن الاستفادة منها في دراسة العديد من النماذج الرياضية المعقدة، فضلاً عن توسيع نطاق استخدام تحويل موعازو - باياوا التكاملية في معالجة المشكلات التطبيقية المختلفة. ومن المتوقع أن تسهم النتائج التي يتم الحصول عليها في هذا البحث في فتح آفاق جديدة أمام الباحثين لتطوير المزيد من التحويلات التكاملية الحديثة وتطبيقها في مجالات متعددة من العلوم والهندسة.

كما أن اعتماد التحويلات التكاملية الحديثة في دراسة المعادلات التفاضلية يوفر حلولاً أكثر دقة ومرونة مقارنة بالطرق التقليدية، الأمر الذي يعزز من أهمية هذا المجال البحثي في الوقت الحاضر. لذلك فإن دراسة تحويل موعازو - باياوا التكاملية لدوال ببسيل تُعد خطوة مهمة نحو تطوير أساليب رياضية جديدة قادرة على التعامل مع المسائل العلمية المعقدة بكفاءة عالية.

2. الدراسات السابقة

حظيت التحويلات التكاملية باهتمام واسع من قبل الباحثين لما لها من دور مهم في حل المعادلات التفاضلية والتكاملية التي تظهر في مختلف فروع الرياضيات التطبيقية والفيزياء والهندسة. وقد أدى هذا الاهتمام إلى ظهور العديد من التحويلات التكاملية الحديثة التي ساهمت في تبسيط كثير من المسائل الرياضية المعقدة، وتقديم طرق أكثر كفاءة مقارنة بالتحويلات التقليدية مثل تحويل لابلاس وتحويل فورييه.

من الدراسات المهمة في هذا المجال الدراسة التي قدمها [Mu'azu-Bayawa Transform] [18] (https://ijarsct.co.in/Paper28636.pdf?utm_source=chatgpt.com) حيث قام الباحثان سعدو بيلو موعازو وزيانو بالارابي باياوا بتقديم تحويل تكاملي جديد أطلق عليه تحويل موعازو - باياوا، مع توضيح خصائصه الأساسية وبعض تطبيقاته في حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة. وقد بينت الدراسة أن هذا التحويل يتميز بسهولة التطبيق وقدرته على تحويل المعادلات التفاضلية إلى معادلات جبرية أبسط، الأمر الذي يساعد في الحصول على حلول دقيقة بكفاءة عالية.

كما تناولت العديد من الدراسات التحويلات التكاملية الحديثة الأخرى، ومن بينها دراسة فرجاني وإكرع و التاويل التي تناولت استخدام تحويل كمال التكاملية في حل معادلات أبيل التكاملية المعممة [13]، حيث أثبت الباحثون فاعلية هذا التحويل في معالجة الأنظمة التكاملية المعقدة واختزال خطوات الحل. كذلك قارنت دراسة أخرى للباحثين أنفسهم بين تحويلي زافي وعبود في حل معادلات فولتيرا التكاملية الخطية [12]، وأظهرت النتائج تقارباً في الكفاءة مع تميز بعض التحويلات بسهولة الاستخدام في مسائل محددة. وقد ساهمت هذه الدراسات في توسيع نطاق استخدام التحويلات التكاملية الحديثة في التطبيقات الرياضية المختلفة.

وفي إطار الاهتمام بتطبيقات التحويلات التكاملية على الدوال الخاصة، ظهرت دراسات ركزت على دوال بيسيل نظراً لأهميتها الكبيرة في التطبيقات الفيزيائية والهندسية. فقد قدم الباحث سودهانشو أغاروال دراسة تناول فيها تحويل كمال التكامل لـ بعض دوال بيسيل [2]، واستنتج عدداً من العلاقات الرياضية المهمة المتعلقة بهذه الدوال، مع توضيح تطبيقات التحويل في حساب التكاملات وحل بعض المعادلات التفاضلية. وقد أظهرت الدراسة أن التحويلات الحديثة توفر أساليب فعالة للتعامل مع دوال بيسيل بصورة أبسط مقارنة بالطرق التقليدية.

وفي دراسة حديثة تناولت تحويلات دوال بيسيل، قدمت الباحثة هدى خليط تحويل إيمان التكامل لـ بعض دوال بيسيل [24]، مع استخدام هذا التحويل في حساب تكاملات محددة وحل بعض المسائل الرياضية المرتبطة بالدوال الخاصة. وأوضحت الدراسة أن التحويل الجديد يتميز بمرونة عالية في التعامل مع التكاملات التي تحتوي على دوال بيسيل، إضافة إلى تقليل الجهد الحسابي المطلوب للوصول إلى الحلول.

كما اهتمت بعض الدراسات بمراجعة شاملة للتحويلات المرتبطة بدوال بيسيل، حيث استعرضت دراسة بعنوان "A Review on Integral Transforms Bessel's Functions" أهم التحويلات المستخدمة مع دوال بيسيل في العلوم والهندسة [25]، مع توضيح تطبيقاتها المختلفة في حل المعادلات التفاضلية والفيزيائية. وأكدت الدراسة أن دوال بيسيل تُعد من أكثر الدوال الخاصة استخداماً في النمذجة الرياضية للموجات والاهتزازات وانتقال الحرارة والظواهر ذات التماثل الأسطواني.

كذلك ظهرت دراسات تناولت تحويلات أخرى مرتبطة بدوال بيسيل مثل تحويل هانكل وتحويلات بيسيل المتقطعة، حيث ركزت هذه الأبحاث على دراسة الخصائص التحليلية لهذه التحويلات واستخدامها في التحليل الطيفي ومعالجة الإشارات وبعض التطبيقات الفيزيائية المتقدمة. وقد بينت هذه الدراسات أهمية الربط بين الدوال الخاصة والتحويلات التكاملية في تطوير أساليب رياضية حديثة قادرة على معالجة النماذج المعقدة بكفاءة عالية.

ومن خلال استعراض الدراسات السابقة يتضح أن معظم الأبحاث ركزت على تطوير تحويلات تكاملية جديدة أو دراسة تطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية والتكاملية، في حين أن الدراسات المتعلقة بتطبيق تحويل موعازو - باياوا التكامل على دوال بيسيل ما زالت محدودة. لذلك تأتي هذه الدراسة لسد جزء من هذا النقص العلمي من خلال استنتاج تحويل موعازو - باياوا لبعض دوال بيسيل، وتوضيح تطبيقاته في إيجاد التكاملات وحل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات غير الثابتة، مما يضيف إسهاماً جديداً في مجال التحويلات التكاملية الحديثة وتطبيقاتها الرياضية.

3. الهدف من البحث

يهدف هذا البحث إلى دراسة تحويل موعازو - باياوا التكامل وتطبيقه على بعض دوال بيسيل المهمة في الرياضيات التطبيقية، وذلك من خلال اشتقاق صور هذا التحويل لبعض دوال بيسيل وإبراز خصائصه الأساسية. كما يسعى البحث إلى توضيح كفاءة هذا التحويل التكامل في معالجة وحل بعض المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات غير الثابتة، والتي تظهر في العديد من التطبيقات الفيزيائية والهندسية. ويهدف البحث كذلك إلى توضيح تحويل موعازو - باياوا التكامل في إيجاد بعض التكاملات التي تحتوي على دوال بيسيل، مع بيان مدى سهولة ودقة النتائج المتحصل عليها مقارنة ببعض الطرق التقليدية. إضافة

إلى ذلك، يهدف البحث إلى تعزيز استخدام التحويلات التكاملية الحديثة باعتبارها أدوات رياضية فعالة تساعد في تبسيط المشكلات الرياضية المعقدة وتحويلها إلى صيغ جبرية أكثر سهولة في المعالجة والتحليل. كما يطمح هذا العمل إلى فتح المجال أمام الباحثين لإجراء المزيد من الدراسات المتعلقة بتحويل موعازو - باياوا التكاملية وتطبيقاته المختلفة، خاصة في مجالات الرياضيات التطبيقية والفيزياء والهندسة، وإمكانية استخدامه في حل أنواع أخرى من المعادلات التكاملية والتفاضلية التي تواجه الباحثين في العلوم التطبيقية المختلفة.

4. منهجية البحث

اعتمد هذا البحث على المنهج التحليلي الرياضي القائم على استخدام القواعد والنظريات المتعلقة بالتحويلات التكاملية ودوال بيسيل، وذلك بهدف اشتقاق تحويل موعازو - باياوا التكاملية لبعض دوال بيسيل وتوضيح تطبيقاته المختلفة. وقد تم تنفيذ البحث وفق خطوات علمية منظمة يمكن تلخيصها فيما يلي:

1. الجانب النظري

تم في البداية استعراض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالتحويلات التكاملية، مع التركيز على تحويل موعازو - باياوا التكاملية وخصائصه الأساسية، بالإضافة إلى تقديم التعريفات والنظريات المرتبطة بدوال بيسيل وبعض خواصها الرياضية المهمة التي تخدم موضوع البحث. كما تم الاعتماد على عدد من المراجع العلمية والأبحاث السابقة ذات العلاقة بالتحويلات التكاملية الحديثة ودوال بيسيل.

2. اشتقاق تحويل موعازو - باياوا لبعض دوال بيسيل

تم استخدام تعريف تحويل موعازو - باياوا التكاملية إلى جانب المتسلسلات الخاصة بدوال بيسيل لاشتقاق صور التحويل لبعض دوال بيسيل المختلفة. وقد اعتمدت عملية الاشتقاق على إجراء عمليات التكامل والتبسيط الرياضي باستخدام خواص السلاسل والمتطابقات الرياضية المعروفة.

3. إيجاد بعض التكاملات

تم تطبيق النتائج المتحصل عليها من تحويل موعازو - باياوا التكاملية لإيجاد بعض التكاملات التي تحتوي على دوال بيسيل، وذلك من خلال استخدام خصائص التحويل والعلاقات الرياضية المرتبطة به للوصول إلى نتائج دقيقة ومبسطة.

4. حل بعض المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات غير الثابتة

استخدم تحويل موعازو - باياوا التكاملية في تحويل بعض المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات غير الثابتة إلى معادلات جبرية أبسط، ثم تم إيجاد الحلول المناسبة باستخدام التحويل العكسي للتحويل التكاملية. وقد تم توضيح خطوات الحل بصورة تفصيلية من خلال مجموعة من الأمثلة التطبيقية.

5. تحليل النتائج ومناقشتها

تم تحليل النتائج التي تم الحصول عليها ومقارنتها ببعض الطرق التقليدية المستخدمة في حل المعادلات التفاضلية والتكاملات، بهدف بيان كفاءة تحويل موعازو - باياوا التكاملية ودقته في معالجة المسائل الرياضية المختلفة.

ومن خلال هذه المنهجية سعى البحث إلى إبراز أهمية تحويل موعازو - باياوا التكاملية كأداة رياضية فعالة يمكن استخدامها في دراسة العديد من التطبيقات الرياضية والهندسية المختلفة.

5. تعريفات ومفاهيم أساسية:

1. تعريفات ومفاهيم أساسية لدوال بيسيل [2]

دالة بيسيل من الرتبة q تعطى بالمتسلسلة التالية

$$J_q(\tau) = \frac{\tau^q}{2^q q!} \left[1 - \frac{\tau^2}{2 \cdot (2q+2)} + \frac{\tau^4}{2 \cdot 4 \cdot (2q+2)(2q+4)} - \frac{\tau^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2q+2)(2q+4)(2q+6)} \dots \right] \quad (1)$$

الحالة الأولى عندما $q = 0$

$$(2) J_0(\tau) = 1 - \frac{\tau^2}{2^2} + \frac{\tau^4}{2^2 4^2} - \frac{\tau^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

هذه متسلسلة دالة بيسيل من الرتبة صفر.

الحالة الثانية عندما $q = 1$

$$(3) J_1(\tau) = \frac{\tau}{2} - \frac{\tau^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{\tau^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{\tau^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots$$

الحالة الثالثة عندما $q = 2$

$$(4) J_2(\tau) = \frac{\tau^2}{2 \cdot 4} - \frac{\tau^4}{2^2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{\tau^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{\tau^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8 \cdot 10} + \dots$$

لاحظ أن

$$(5) \frac{d}{d\tau} J_0(\tau) = -J_1(\tau)$$

$$(6) J_2(\tau) = J_0(\tau) + 2J_0''(\tau)$$

2. تعريفات ومفاهيم أساسية لتحويل موعازو - باياوا التكاملي [26, 18]

يعرف تحويل موعازو - باياوا التكاملي للدوال ذات الرتبة الأسية على النحو التالي :

الدوال في المجموعة Γ معرفة على الصورة

$$(7) \Gamma = \left\{ \varphi(\tau) : \exists \Omega, \rho_1, \rho_2 > 0, |\varphi(\tau)| < \Omega e^{\rho_1 \tau} : \tau \in (-1)^i \times [0, \infty) \right\}$$

حيث الثابت Ω عدد منتهي , و ρ_1, ρ_2 قد يكونان محدودان أو غير محدودان, و يرمز للتحويل التكاملي موعازو - باياوا بالرمز $\{M_B\}$ ويعرف بالتكامل التالي

$$(8)M_B\{\varphi(\tau)\} = \Phi(v) = \int_0^\infty \varphi(\tau)e^{\frac{-\tau}{v^2}}d\tau, \quad \tau \geq 0, \rho_1 \leq v \leq \rho_2$$

حيث v هو متغير تحويل موعازو- باياوا التكاملي و τ متغير الدالة φ

3. تحويل موعازو - باياوا التكاملي لبعض الدوال الأساسية [26, 18]

الجدول التالي يوضح تحويل موعازو- باياوا التكاملي لبعض الدوال الأساسية

$\varphi(\tau)$	$M_B\{\varphi(\tau)\} = \Phi(v)$
1	v^2
τ	v^4
τ^2	$2! v^6$
τ^q	$q! v^{2(q+1)}$
$e^{a\tau}$	$\frac{v^2}{1 - av^2}$
$\sin(a\tau)$	$\frac{av^4}{1 + a^2v^4}$
$\cos(a\tau)$	$\frac{v^2}{1 + a^2v^4}$
$\sinh(a\tau)$	$\frac{av^4}{1 - a^2v^4}$
$\cosh(a\tau)$	$\frac{v^2}{1 - a^2v^4}$

4. تحويل موعازو- باياوا التكاملي لبعض المشتقات [26, 18]

لتكن $\varphi(\tau)$ دالة و $M_B\{\varphi(\tau)\} = \Phi(v)$ فإن تحويل موعازو - باياوا التكاملي للمشتقات يكون على

$$M_B\{\varphi'(\tau)\} = \frac{1}{v^2} \Phi(v) - \varphi(0) \quad (i)$$

$$(ii)M_B\{\varphi''(\tau)\} = \frac{1}{v^4} \Phi(v) - \frac{1}{v^2} \varphi(0) - \varphi'(0)$$

$$(iii)M_B\{\varphi^{(q)}(\tau)\} = \frac{1}{v^{2q}} \Phi(v) - \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{v^{2q-2k-2}} \varphi^{(k)}(0)$$

5. تحويل موعازو - باياوا التكاملي لكل من $\tau^3 \varphi(\tau)$, $\tau^2 \varphi(\tau)$, $\tau \varphi(\tau)$ [26, 18]

لتكن $\varphi(\tau)$ و $M_B\{\varphi(\tau)\} = \Phi(v)$

$$(i) M_B\{\tau\varphi(\tau)\} = \frac{v^3}{2} \frac{d}{dv} \Phi(v)$$

$$M_B\{\tau^2\varphi(\tau)\} = \frac{3v^5}{4} \frac{d}{dv} \Phi(v) + \frac{v^6}{4} \frac{d^2}{dv^2} \Phi(v) \quad (ii)$$

$$M_B\{\tau^3\varphi(\tau)\} = \frac{15v^7}{8} \frac{d}{dv} \Phi(v) + \frac{9v^8}{8} \frac{d^2}{dv^2} \Phi(v) + \frac{v^9}{8} \frac{d^3}{dv^3} \Phi(v) \quad (iii)$$

6. تحويل موعازو- باياوا التكاملية لكل من $\tau^3\varphi'''(\tau)$, $\tau^2\varphi''(\tau)$, $\tau\varphi'(\tau)$ [26, 18]

يكون على الصورة التالية :

$$M_B\{t\varphi'(\tau)\} = \frac{v}{2} \frac{d}{dv} \Phi(v) - \Phi(v) \quad (i)$$

$$(ii) M_B\{t^2\varphi'(\tau)\} = \frac{v^4}{4} \frac{d^2}{dv^2} \Phi(v) - \frac{v^3}{4} \frac{d}{dv} \Phi(v)$$

$$(iii) M_B\{t^3\varphi'(\tau)\} = \frac{v^7}{8} \frac{d^3}{dv^3} \Phi(v) + \frac{3v^6}{8} \frac{d^2}{dv^2} \Phi(v) - \frac{3v^5}{8} \frac{d}{dv} \Phi(v)$$

7. تحويل موعازو- باياوا التكاملية لكل من $\tau^2\varphi''(\tau)$, $\tau\varphi''(\tau)$ [26, 18]

يكون على الصورة التالية :

$$M_B\{t\varphi''(\tau)\} = \frac{1}{2v} \frac{d}{dv} \Phi(v) - \frac{2}{v^2} \Phi(v) + \varphi(0) \quad (i)$$

$$(ii) M_B\{t^2\varphi''(\tau)\} = \frac{v^2}{4} \frac{d^2}{dv^2} \Phi(v) - \frac{5v}{4} \frac{d}{dv} \Phi(v) + 2\Phi(v)$$

8. تحويل موعازو- باياوا التكاملية لالتفاف دالتين [18]

يرمز لالتفاف دالتين $\varphi(\tau)$ و $\psi(\tau)$ بالرمز $\varphi(\tau) * \psi(\tau)$ ويعرف بالعلاقة التالية :

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) * \psi(\tau) &= \varphi * \psi = \int_0^\tau \varphi(\varrho) \psi(\tau - \varrho) d\varrho \\ &= \int_0^\tau \psi(\varrho) \varphi(\tau - \varrho) d\varrho \end{aligned}$$

نفرض أن $M_B\{\psi(\tau)\} = \Psi(v)$ و $M_B\{\varphi(\tau)\} = \Phi(v)$ فإن

$$M_B\{\varphi(\tau) * \psi(\tau)\} = M_B\{\varphi(\tau)\} M_B\{\psi(\tau)\} = \Phi(v) \Psi(v)$$

9. تحويل موعازو- باياوا التكاملية لبعض دوال بيسيل [26]

$$(i) M_B\{J_0(\tau)\} = \frac{v^2}{\sqrt{1+v^4}}$$

البرهان:

$$J_0(\tau) = 1 - \frac{\tau^2}{2^2} + \frac{\tau^4}{2^2 4^2} - \frac{\tau^6}{2^2 4^2 6^2} - \dots$$

$$M_B\{J_0(\tau)\} = M_B\{1\} - \frac{1}{2^2} M_B\{\tau^2\} + \frac{1}{2^2 4^2} M_B\{\tau^4\} - \frac{1}{2^2 4^2 6^2} M_B\{\tau^6\} + \dots$$

$$M_B\{J_0(\tau)\} = v^2 - \frac{2v^6}{2^2} + \frac{4!v^{10}}{2^2 4^2} - \frac{6!v^{14}}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

$$M_B\{J_0(\tau)\} = v^2 \left[1 - \frac{v^4}{2} + \frac{v^8}{2.4} - \frac{3.5 v^{12}}{2.4.6} + \dots \right]$$

من المعلوم أن

$$(1 + \xi)^\alpha = 1 + \alpha\xi + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \xi^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \xi^3 + \dots$$

حيث α عدد حقيقي , $|\xi| < 1$

بوضع $\alpha = -\frac{1}{2}$ نجد أن

$$(1 + \xi)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\xi + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\xi^2 - \frac{3.5}{(2)(2)(2)(6)}\xi^3 + \dots$$

بوضع $\xi = v^4$ نحصل على

$$(1 + v^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}v^4 + \frac{3}{8}v^8 - \frac{3.5}{2.4.6}v^{12} + \dots$$

إذاً

$$M_B\{J_0(\tau)\} = v^2(1 + v^4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$M_B\{J_0(\tau)\} = \frac{v^2}{\sqrt{1+v^4}}$$

ومنها نحصل على

(ii)

$$M_B\{J_1(\tau)\} = \frac{\sqrt{1+v^4}-1}{\sqrt{1+v^4}}$$

البرهان:

لاحظ أن

$$J_0'(\tau) = -J_1(\tau)$$

$$M_B\{\varphi'(\tau)\} = \frac{1}{v^2} M_B\{\varphi(\tau)\} - \varphi(0)$$

$$M_B\{J_0'(\tau)\} = -M_B\{J_1(\tau)\}$$

$$M_B\{J_0'(\tau)\} = \frac{1}{v^2} M_B\{J_0(\tau)\} - J_0(0)$$

$$M_B\{J_0'(\tau)\} = \frac{1}{v^2} \left\{ \frac{v^2}{\sqrt{1+v^4}} \right\} - 1$$

$$M_B\{J_0'(\tau)\} = \frac{1}{\sqrt{1+v^4}} - \frac{\sqrt{1+v^4}}{\sqrt{1+v^4}}$$

$$M_B\{J_0'(\tau)\} = \frac{1-\sqrt{1+v^4}}{\sqrt{1+v^4}}$$

$$M_B\{J_1(\tau)\} = -M_B\{J_0'(\tau)\} = \frac{\sqrt{1+v^4}-1}{\sqrt{1+v^4}}$$

$$(iii) M_B\{J_2(\tau)\} = \frac{v^4+2-2\sqrt{1+v^4}}{v^2\sqrt{1+v^4}}$$

البرهان:

$$J_2(\tau) = J_0(\tau) + 2J_0''(\tau)$$

$$M_B\{J_2(\tau)\} = M_B\{J_0(\tau)\} + 2M_B\{J_0''(\tau)\}$$

$$M_B\{J_2(\tau)\} = \frac{v^2}{\sqrt{1+v^4}} + 2 \left[\frac{1}{v^4} M_B\{J_0(\tau)\} - \frac{1}{v^2} J_0(0) - J_0'(0) \right]$$

$$M_B\{J_2(\tau)\} = \frac{v^2}{\sqrt{1+v^4}} + 2 \left[\frac{1}{v^4} \left(\frac{v^2}{\sqrt{1+v^4}} \right) - \frac{1}{v^2} + J_1(0) \right]$$

$$M_B\{J_2(\tau)\} = \frac{v^2}{\sqrt{1+v^4}} + \frac{2}{v^2\sqrt{1+v^4}} - \frac{2}{v^2}$$

$$M_B\{J_2(\tau)\} = \frac{v^4 + 2 - 2\sqrt{1+v^4}}{v^2\sqrt{1+v^4}}$$

10. التطبيقات

1.10 استخدام تحويل موعازو - باياوا التكاملية لإيجاد بعض التكاملات

مثال 1: أوجد التكامل التالي باستخدام تحويل موعازو - باياوا التكاملية

$$I(\tau) = \int_0^\tau J_0(\omega)J_0(\tau - \omega)d\omega$$

الحل:

$$M_B\{I(\tau)\} = M_B\left\{\int_0^\tau J_0(\omega)J_0(\tau - \omega)d\omega\right\}$$

$$M_B\{I(\tau)\} = M_B\{J_0(\tau)\}M_B\{J_0(\tau)\}$$

$$M_B\{I(\tau)\} = \frac{v^2}{\sqrt{1+v^4}} \frac{v^2}{\sqrt{1+v^4}}$$

$$= \frac{v^4}{1+v^4}$$

$$I(\tau) = M_B^{-1}\left\{\frac{v^4}{1+v^4}\right\}$$

$$= \sin \tau$$

مثال 2: أوجد التكامل التالي باستخدام تحويل موعازو - باياوا التكاملية

$$I(\tau) = \int_0^\tau J_1(\tau - \omega)d\omega$$

الحل:

$$M_B\{I(\tau)\} = M_B\left\{\int_0^\tau J_1(\tau - \omega)d\omega\right\}$$

$$M_B\{I(\tau)\} = M_B\{1\}M_B\{J_1(\tau)\}$$

$$M_B\{I(\tau)\} = v^2 \frac{\sqrt{1+v^4}-1}{\sqrt{1+v^4}}$$

$$M_B\{I(\tau)\} = \frac{v^2\sqrt{1+v^4}-v^2}{\sqrt{1+v^4}}$$

$$\begin{aligned} I(\tau) &= M^{-1}_B\{v^2\} - M^{-1}_B\left\{\frac{v^2}{\sqrt{1+v^4}}\right\} \\ &= 1 - J_0(\tau) \end{aligned}$$

مثال 3: أوجد التكامل التالي باستخدام تحويل موعازو - باياوا التكاملية

$$I(\tau) = \int_0^\tau J_0(\omega)J_1(\tau - \omega)d\omega$$

الحل:

$$M_B\{I(\tau)\} = M_B\left\{\int_0^\tau J_0(\omega)J_1(\tau - \omega)d\omega\right\}$$

$$M_B\{I(\tau)\} = M_B\{J_0(\tau)\}M_B\{J_1(\tau)\}$$

$$M_B\{I(\tau)\} = \frac{v^2}{\sqrt{1+v^4}} \frac{\sqrt{1+v^4}-1}{\sqrt{1+v^4}}$$

$$M_B\{I(\tau)\} = \frac{v^2[\sqrt{1+v^4}-1]}{1+v^4}$$

$$M_B\{I(\tau)\} = \frac{v^2}{\sqrt{1+v^4}} - \frac{v^2}{1+v^4}$$

$$\begin{aligned} &= M^{-1}_B\left\{\frac{v^2}{\sqrt{1+v^4}}\right\} - M^{-1}_B\left\{\frac{v^2}{1+v^4}\right\} \\ &= J_0(\tau) - \cos \tau \end{aligned}$$

2.10 استخدام تحويل موعازو - باياوا التكاملية لحل بعض المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات غير الثابتة.

مثال 1: لتكن مسألة القيمة الابتدائية على الصورة

$$\tau\omega'' + \omega' + \tau\omega = 0$$

$$\omega(0) = 1, \omega'(0) = 0$$

بتطبيق تحويل موعازو - باياوا التكاملية نجد أن

$$M_B\{\tau\omega''\} + M_B\{\omega'\} + M_B\{\tau\omega\} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2v} \frac{d}{dv} M_B\{\omega\} - \frac{2}{v^2} M_B\{\omega\} + \omega(0) + \frac{1}{v^2} M_B\{\omega\} - \omega(0) + \frac{v^3}{2} \frac{d}{dv} M_B\{\omega\} &= 0 \\
\left(\frac{1}{2v} + \frac{v^3}{2}\right) \frac{d}{dv} M_B\{\omega\} + \left(\frac{1}{v^2} - \frac{2}{v^2}\right) M_B\{\omega\} &= 0 \\
\left(\frac{1+v^4}{2v}\right) \frac{d}{dv} M_B\{\omega\} - \left(\frac{1}{v^2}\right) M_B\{\omega\} &= 0 \\
\left(\frac{1+v^4}{2v}\right) \frac{d}{dv} M_B\{\omega\} &= \left(\frac{1}{v^2}\right) M_B\{\omega\} \\
\frac{d}{dv} M_B\{\omega\} &= \left(\frac{2}{v(1+v^4)}\right) M_B\{\omega\} \\
\frac{dM_B\{\omega\}}{M_B\{\omega\}} &= \left(\frac{2}{v(1+v^4)}\right) dv \\
M_B\{\omega\} &= \frac{C v^2}{\sqrt{1+v^4}}
\end{aligned}$$

باستخدام التحويل العكسي

$$\omega(\tau) = M^{-1}_B \left\{ \frac{C v^2}{\sqrt{1+v^4}} \right\}$$

نحصل على

$$\omega(\tau) = C J_0(\tau)$$

مثال 2: لتكن مسألة القيمة الابتدائية على الصورة

$$\begin{aligned}
\tau \omega'' + \omega' + 4\tau \omega &= 0 \\
\omega(0) = 3, \omega'(0) &= 0
\end{aligned}$$

بتطبيق تحويل موغازو-باياوا التكاملية نجد أن

$$\begin{aligned}
M_B\{\tau \omega''\} + M_B\{\omega'\} + 4M_B\{\tau \omega\} &= 0 \\
\frac{1}{2v} \frac{d}{dv} M_B\{\omega\} - \frac{2}{v^2} M_B\{\omega\} + \omega(0) + \frac{1}{v^2} M_B\{\omega\} - \omega(0) + 4 \frac{v^3}{2} \frac{d}{dv} M_B\{\omega\} &= 0 \\
\left(\frac{1}{2v} + 2v^3\right) \frac{d}{dv} M_B\{\omega\} + \left(\frac{1}{v^2} - \frac{2}{v^2}\right) M_B\{\omega\} &= 0 \\
\left(\frac{1+4v^4}{2v}\right) \frac{d}{dv} M_B\{\omega\} - \left(\frac{1}{v^2}\right) M_B\{\omega\} &= 0 \\
\left(\frac{1+4v^4}{2v}\right) \frac{d}{dv} M_B\{\omega\} &= \left(\frac{1}{v^2}\right) M_B\{\omega\} \\
\frac{d}{dv} M_B\{\omega\} &= \left(\frac{2}{v(1+4v^4)}\right) M_B\{\omega\} \\
\frac{dM_B\{\omega\}}{M_B\{\omega\}} &= \left(\frac{2}{v(1+4v^4)}\right) dv \\
M_B\{\omega\} &= \frac{C v^2}{\sqrt{1+4v^4}}
\end{aligned}$$

باستخدام التحويل العكسي

$$\omega(\tau) = M^{-1}_B \left\{ \frac{C v^2}{\sqrt{1+4v^4}} \right\}$$

نحصل على

$$\omega(\tau) = C J_0(2\tau)$$

6. تحليل النتائج ومناقشتها

أظهرت النتائج المتحصل عليها من هذا البحث أن تحويل موعازو - باياوا التكاملي يُعد من التحويلات التكاملية الفعالة في التعامل مع دوال ببسيل وبعض المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات غير الثابتة. فقد تم التوصل إلى صيغ واضحة لتحويل عدد من دوال ببسيل باستخدام تعريف تحويل موعازو - باياوا التكاملي وخواصه الأساسية، الأمر الذي يؤكد إمكانية توظيف هذا التحويل في معالجة الدوال الخاصة بصورة مبسطة ودقيقة.

كما بينت النتائج أن استخدام تحويل موعازو - باياوا التكاملي ساهم في تبسيط خطوات حل بعض التكاملات التي تحتوي على دوال ببسيل، حيث تم تحويل المسائل التكاملية المعقدة إلى صيغ جبرية أكثر سهولة في المعالجة، مما قلل من الجهد الحسابي المطلوب للوصول إلى الحلول النهائية. وقد أظهرت الأمثلة التطبيقية أن النتائج المستخرجة كانت متوافقة مع القواعد الرياضية المعروفة، مما يعكس دقة وموثوقية هذا التحويل. وفيما يتعلق بحل المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات غير الثابتة، أوضحت النتائج أن تحويل موعازو - باياوا التكاملي يمتلك قدرة جيدة على تحويل المعادلات التفاضلية إلى معادلات جبرية أبسط، وبالتالي تسهيل عملية إيجاد الحلول باستخدام التحويل العكسي. كما تبين أن هذا التحويل يوفر طريقة مباشرة ومنظمة للحل مقارنة ببعض الطرق التقليدية التي قد تتطلب خطوات أطول وتعقيدات رياضية أكبر.

ومن خلال مقارنة النتائج الحالية ببعض الدراسات السابقة المتعلقة بالتحويلات التكاملية الحديثة مثل تحويل كمال وتحويل ساوي وتحويل زاكي، لوحظ أن تحويل موعازو - باياوا يتميز بالمرونة والبساطة في التطبيق، خاصة عند التعامل مع دوال ببسيل والمعادلات ذات المعاملات غير الثابتة. وهذا يدل على أن التحويل يمكن أن يكون إضافة مهمة إلى مجموعة التحويلات التكاملية المستخدمة في الرياضيات التطبيقية.

كذلك أكدت النتائج أهمية الربط بين التحويلات التكاملية الحديثة والدوال الخاصة، حيث إن هذا الربط يساهم في تطوير أساليب رياضية جديدة يمكن استخدامها في العديد من التطبيقات الفيزيائية والهندسية، مثل مسائل الاهتزازات وانتقال الحرارة وانتشار الموجات. كما أن نجاح تحويل موعازو - باياوا في معالجة الأمثلة الواردة في هذا البحث يشجع على توسيع استخدامه مستقبلاً في حل أنواع أخرى من المعادلات التفاضلية والتكاملية.

وبناءً على ما سبق، يمكن القول إن النتائج التي تم الحصول عليها تثبت كفاءة تحويل موعازو - باياوا التكاملي كأداة رياضية فعالة في دراسة دوال ببسيل وحل بعض المسائل الرياضية المرتبطة بها، الأمر الذي يفتح المجال أمام المزيد من الدراسات المستقبلية لتطوير هذا التحويل وتطبيقه في مجالات علمية أخرى.

7. الاستنتاجات:

بعد تحليل النتائج ومناقشتها يمكن التوصل إلى الاستنتاجات الآتية:

1. أثبت تحويل موعازو - باياوا التكاملي كفاءته في إيجاد صور تحويلية لبعض دوال ببسيل بطريقة مباشرة ومنظمة.
2. أظهرت النتائج أن التحويل يساعد في تبسيط العمليات الرياضية المعقدة وتحويلها إلى صيغ جبرية أكثر سهولة في المعالجة والحل.
3. تبين أن تحويل موعازو - باياوا التكاملي يُعد أداة فعالة في حل بعض المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات غير الثابتة، مع تقليل الخطوات الحسابية مقارنة ببعض الطرق التقليدية.
4. أوضحت التطبيقات العملية إمكانية استخدام التحويل في إيجاد بعض التكاملات التي تحتوي على دوال ببسيل بدقة ومرونة عالية.

5. أكدت الدراسة أن هناك توافقاً بين النتائج المتحصل عليها باستخدام تحويل موعازو – باياوا التكاملي والنتائج الرياضية المعروفة، مما يعزز من صحة وموثوقية هذا التحويل.
6. بينت الدراسة أن الربط بين التحويلات التكاملية الحديثة والدوال الخاصة يسهم في تطوير أساليب رياضية جديدة يمكن الاستفادة منها في التطبيقات الفيزيائية والهندسية المختلفة.
7. أظهرت النتائج أن تحويل موعازو – باياوا التكاملي يمكن أن يشكل إضافة مهمة إلى مجموعة التحويلات التكاملية الحديثة المستخدمة في الرياضيات التطبيقية.
8. تفتح هذه الدراسة المجال أمام إجراء أبحاث مستقبلية لتطبيق تحويل موعازو – باياوا التكاملي على أنواع أخرى من الدوال الخاصة والمعادلات التفاضلية والتكاملية الأكثر تعقيداً.

8. الخاتمة

تناول هذا البحث دراسة تحويل موعازو – باياوا التكاملي لبعض دوال بيسيل، مع توضيح أهم تطبيقاته في إيجاد بعض التكاملات وحل بعض المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات غير الثابتة. وقد تم في البداية عرض المفاهيم الأساسية المتعلقة بدوال بيسيل وتحويل موعازو – باياوا التكاملي، ثم استنتاج صور هذا التحويل لبعض دوال بيسيل باستخدام التعريفات والخواص الرياضية المناسبة. وأظهرت النتائج أن تحويل موعازو – باياوا التكاملي يمتاز بالكفاءة والمرونة في التعامل مع الدوال الخاصة، حيث ساعد في تبسيط العديد من العمليات الرياضية وتحويل المسائل المعقدة إلى صيغ جبرية أكثر سهولة في المعالجة. كما تبين أن هذا التحويل يُعد أداة فعالة في حل بعض المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات غير الثابتة، وذلك من خلال تقليل خطوات الحل وتسهيل الحصول على النتائج المطلوبة باستخدام التحويل العكسي.

كذلك أوضحت التطبيقات الواردة في البحث قدرة تحويل موعازو – باياوا التكاملي على إيجاد بعض التكاملات التي تحتوي على دوال بيسيل بصورة دقيقة ومنظمة، مما يؤكد إمكانية استخدامه في العديد من التطبيقات الرياضية والفيزيائية والهندسية المختلفة. وقد أظهرت النتائج توافقاً مع الأساليب الرياضية المعروفة، الأمر الذي يعزز من موثوقية هذا التحويل وإمكانية الاعتماد عليه في الدراسات المستقبلية.

ومن خلال هذه الدراسة يمكن الاستنتاج أن تحويل موعازو – باياوا التكاملي يمثل إضافة مهمة إلى التحويلات التكاملية الحديثة، وأنه يمتلك إمكانيات واعدة في معالجة العديد من المسائل الرياضية التطبيقية. لذلك يوصي البحث بإجراء المزيد من الدراسات حول هذا التحويل وتطبيقه على أنواع أخرى من الدوال الخاصة والمعادلات التفاضلية والتكاملية، بالإضافة إلى دراسة إمكانية استخدامه في مجالات أوسع مثل الفيزياء الرياضية والهندسة وعلوم الحاسوب.

9. التوصيات:

- في ضوء النتائج التي تم التوصل إليها في هذا البحث، يمكن تقديم التوصيات الآتية:
1. التوسع في دراسة تحويل موعازو – باياوا التكاملي وتطبيقه على أنواع أخرى من الدوال الخاصة غير دوال بيسيل، مثل دوال ليجاندر ودوال هيرميت ودوال لاجور.
2. إجراء المزيد من الدراسات المتعلقة باستخدام تحويل موعازو – باياوا التكاملي في حل المعادلات التفاضلية الجزئية والمعادلات التكاملية ذات الرتب المختلفة.
3. الاستفادة من تحويل موعازو – باياوا التكاملي في معالجة بعض المسائل التطبيقية في الفيزياء والهندسة، مثل مسائل انتقال الحرارة، والاهتزازات، وانتشار الموجات، والدوائر الكهربائية.
4. مقارنة كفاءة تحويل موعازو – باياوا التكاملي مع التحويلات التكاملية الحديثة الأخرى، مثل تحويل كمال وتحويل ساوي وتحويل زاكي، بهدف تحديد نقاط القوة والتميز لكل تحويل.

5. تطوير برامج وتطبيقات حاسوبية تعتمد على تحويل موعازو – باياوا التكاملي للمساعدة في حل المسائل الرياضية المعقدة بصورة أسرع وأكثر دقة.
6. تشجيع الباحثين وطلبة الدراسات العليا على الاهتمام بالتحويلات التكاملية الحديثة لما لها من أهمية كبيرة في تطوير الرياضيات التطبيقية وخدمة العلوم الهندسية والفيزيائية.
7. دراسة الخصائص الرياضية الأخرى لتحويل موعازو – باياوا التكاملي، مثل التقارب والاستمرارية والتحويل العكسي، والتوسع في إثبات النظريات المرتبطة به.
8. إجراء أبحاث مستقبلية تهدف إلى استخدام تحويل موعازو – باياوا التكاملي في حل النماذج الرياضية المعقدة التي تظهر في العلوم التطبيقية وعلوم الحاسوب والذكاء الاصطناعي.

المراجع

- [1] Aboud, M. A. (2016). Application of a new integral transform in differential equations. "Applied Mathematical Sciences, 10"(45), 2231–2242.
- [2] Aggarwal, S. (2018). "Kamal transform of Bessel's functions". International Journal of Research and Innovation in Applied Science, 3(7), 1–4.
- [3] Andrews, L. C., & Shivamoggi, B. K. (1999). "Integral transforms for engineers". SPIE Press.
- [4] Attaweel, M., & Lahwal, A. (2020). A new application of the Kamal transform for solving systems of Volterra integral equations of convolution type. "Journal of Educational, 17", 287–291.
- [5] Attaweel, M., & Lahwal, A. (2020). On solving systems of ordinary differential equations using the Kamal transform. "Journal of Educational, 16", 232–238.
- [6] Attaweel, M., & Lahwal, A. (2021). On solving nonlinear Volterra integral equations of first kind using Mahgoub transform. "Journal of Educational, 18", 677–685.
- [7] Attaweel, M., & Lahwal, A. (2022). Application of Sawi transform for solving systems of Volterra integral equations and systems of Volterra integro-differential equations. "Journal of Educational, 20", 400–405.
- [8] Attaweel, M., & Sultan, A. (2021). A new application of Sawi transform on some partial differential equations. "Journal of Sadda Aljamia, 2", 23–30.
- [9] Belgacem, F. B. M., & Karaballi, A. A. (2006). Sumudu transform fundamental properties investigations and applications. "International Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 2006", 1–23.
- [10] Churchill, R. V., & Brown, J. W. (2006). "Fourier series and boundary value problems" (7th ed.). McGraw-Hill.
- [11] Debnath, L., & Bhatta, D. (2014). "Integral transforms and their applications" (3rd ed.). Chapman & Hall/CRC.
- [12] Frjani, J., Ikreea, A., & Attaweel, M. (2019). A comparison between Elzaki and Aboodh transforms to solve systems of linear Volterra integral equations. "Journal of Humanitarian and Applied Sciences, 8", 237–254.
- [13] Frjani, J., Ikreea, A., & Attaweel, M. (2019). A new application of Kamal transform for solving systems of generalized Abel's integral equations. "Taqnyia Journal, 15"(1/2), 41–47.
- [14] Frjani, J., Ikreea, A., & Attaweel, M. (2020). Sawi transform of some special functions. "Journal of Science and Technology Awlad Ali, 1"(2), 1–8.
- [15] Kamal, H. (2016). On the Kamal transform. "International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 5"(1), 82–87.
- [16] Kreyszig, E. (2011). "Advanced engineering mathematics" (10th ed.). John Wiley & Sons.

- [17] Mahgoub, M. M. A. (2017). The new integral transform “Mahgoub transform.” “Advances in Theoretical and Applied Mathematics, 12”(2), 113–120.
- [18] Mu’azu, S. B., & Bayawa, Z. B. (2025). The new integral transform Mu’azu–Bayawa transform with applications. “International Journal of Advanced Research in Science, Communication and Technology, 5”(1), 282–290.
- [19] Rainville, E. D. (1971). “Special functions”. Chelsea Publishing Company.
- [20] Rashdi, H., & Attaweel, M. (2022). A new application of Sawi transform for solving ordinary differential equations with variable coefficients. “Journal of Educational, 20”, 486–494.
- [21] Sneddon, I. N. (1972). “The use of integral transforms”. McGraw-Hill.
- [22] Watson, G. N. (1995). “A treatise on the theory of Bessel functions” (2nd ed.). Cambridge University Press.
- [23] Zaki, S. I. (2014). A new integral transform and its applications. “International Journal of Pure and Applied Mathematics, 95”(4), 567–575.
- [24] Khalat, H.M. (2025). The New Integral Transform “Iman Transform”. Of Bessel’s functions with Application for Evaluating Definite Integrals. The Libyan Journal of Science, 28(1), 28–36.
- [25] Al Fatlawy, Z.M.R., Alwan, M.A., & Maehad, M.S.J. (2024). A Review on integral transforms Bessel’s functions. “International Journal of Engineering and Information Systems (IJEAIS), 8(10), 1–4.
- [26] Abdusalam.R. Ahmed, Milad E. Drbuk, & Eenas Alhasouni Salim. (2026). On Certain Generalized Subclasses of Multivalent Functions With Negative Coefficients Defined by a Linear Operator. Journal of Libyan Academy Bani Walid, 2(1), 270–277.
<https://doi.org/10.61952/jlabw.v2i1.455>
- [27] Turkiya A. Aljamal. (2026). Applications of Laguerre Polynomials in Second-Order Differential Equations and Some of Their Applications. Journal of Libyan Academy Bani Walid, 2(2), 255–266. Retrieved from
<https://journals.labjournal.ly/index.php/Jlabw/article/view/551>
- [28] Calculation displacement Vibration of Circular Membranes and Insulated Circular Disk Temperature by Using Bessel Functions. (2025). Albahit Journal of Applied Sciences, 4(2), 28-39. <https://doi.org/10.65419/albahit.v4i2.80>
- [29] اشتيوي، غادة. (2025). حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية ذات المعاملات المتغيرة باستخدام تحويل تكاملي جديد. “مجلة جامعة سبها للعلوم البحتة والتطبيقية، 24” (3)، 1–6.

Compliance with ethical standards

Disclosure of conflict of interest

The authors declare that they have no conflict of interest.

Disclaimer/Publisher’s Note: The statements, opinions, and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and not of JLABW and/or the editor(s). JLABW and/or the editor(s) disclaim responsibility for any injury to people or property resulting from any ideas, methods, instructions, or products referred to in the content.