Journal of Libyan Academy Bani Walid 2026
مجلة الأكاديمية الليبية بني وليد
e-ISSN: 3104-3860
Volume 2, Issue 5, 2026, Pages: 730-747
Website: https://journals.labjournal.ly/index.php/Jlabw/index

Separation Axioms in Generalized Topologies Generated by Binary Relations: Relational Characterizations and Applications to Finite Permutations

Nourah Faraj Ramadan Alhoush*
Department of Mathematics, Faculty of Education – Al-Zahra, Al-Jafara University, Al-Zahra, Libya.
*Email: nora.alhoush@aju.edu.ly

مسلمات الفصل في الطوبولوجيات المعممة المولدة بالعلاقات الثنائية: توصيفات عَلاقية وتطبيقات على التبديلات المنتهية

نورة فرج رمضان الهوش*
قسم الرياضيات، كلية التربية الزهراء، جامعة الجفارة، الزهراء، ليبيا

Received: 28-07-2026	**Accepted:** 07-10-2026	**Published**: 19-10-2026
Copyright: © 2026 by the authors. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Abstract

This study examines the separation axioms T_0, T_1, T_2 in the generalized topology μ_R generated by all unions of successor neighborhoods of an arbitrary binary relation R on a nonempty set X. Separation is considered on the support $M_{\mu_R} = \text{Range}(R)$, including generalized topologies that are not strong on X. The axioms T_0 and T_1 are characterized by distinctness and pairwise incomparability under inclusion of predecessor neighborhoods, respectively. The T_2 axiom is characterized by the existence, for every pair of distinct support points, of disjoint generating neighborhoods containing the respective points. Necessary and sufficient separation conditions are also obtained when each successor neighborhood has at most two elements. Finite examples show that reflexive and symmetric closures need not preserve separation axioms. For antisymmetric relations, the reflexive closure generates a T_0 space; if the original space is T_1, preservation of T_1 is equivalent to the domain of the relation being contained in its range. Separation for relations defined by finite permutations is classified by cycle lengths. The axioms T_0 and T_1 are equivalent in the generalized topology generated by each closure. The reflexive case is T_2 if and only if cycles of lengths 2 and 3 are absent; the symmetric case is T_2 if and only if cycles of lengths 3,4,6 are absent.

Keywords: Generalized topology; Binary relations; Separation axioms; Reflexive closure; Symmetric closure; Finite permutations.

الملخص

تتناول الدراسة مسلمات الفصل T_0, T_1, T_2 في الطوبولوجيا المعممة μ_R المولدة بجميع اتحادات جوارات الخلف لعلاقة ثنائية اعتباطية R على مجموعة غير خالية X. ويعتمد الفصل على مجموعة الدعم $M_{\mu_R} = \text{Range}(R)$، مما يشمل الطوبولوجيات المعممة غير القوية على X. تم توصيف T_0 باختلاف جوارات

السلف للنقاط المتميزة، وT_1 بعدم احتواء أي من جواري السلف في الآخر، وT_2 بوجود جوارين مولدين يحتويان النقطتين على الترتيب ويكون تقاطعهما خاليا. كما تم الحصول على شروط لازمة وكافية للفصل عندما لا يتجاوز حجم كل جوار خلف عنصرين. وأظهرت الأمثلة المنتهية أن الإغلاقين الانعكاسي والتناظري لا يحفظان مسلمات الفصل عموما. وللعلاقات المضادة للتناظر، يضمن الإغلاق الانعكاسي تحقق T_0؛ وعند تحقق T_1 قبل الإغلاق، يكون حفظه مكافئا لاحتواء مجال العلاقة في مداها. وتم تصنيف الفصل لعلاقات التبديلات المنتهية بدلالة أطوال الدورات. ويتكافأ T_0 وT_1 في الطوبولوجيا المعممة المولدة بكل من الإغلاقين. ويتحقق T_2 في حالة الإغلاق الانعكاسي إذا وفقط إذا غابت الدورات ذات الطولين 2 و3، وفي حالة الإغلاق التناظري إذا وفقط إذا غابت الدورات ذات الأطوال 3,4,6.

الكلمات المفتاحية: الطوبولوجيا المعممة؛ العلاقات الثنائية؛ مسلمات الفصل؛ الإغلاق الانعكاسي؛ الإغلاق التناظري؛ التبديلات المنتهية.

المقدمة

تصف مسلمات الفصل إمكان تمييز النقاط وفصلها بواسطة المجموعات المفتوحة. وفي الطوبولوجيا المعممة، تكون عائلة المفتوحات مغلقة تحت الاتحادات الاعتباطية، دون اشتراط إغلاقها تحت التقاطعات المنتهية أو احتوائها المجموعة الكلية. قدم Császár هذا الإطار لدراسة الطوبولوجيا والاستمرارية المعممتين [1]، ثم تناول مسلمات الفصل باستخدام مجموعات مفتوحة أعم من المفتوحات الطوبولوجية المعتادة [2].

يتطلب بحث الفصل في الفضاءات المعممة غير القوية تحديد النقاط التي تطبق عليها المسلمات، لأن بعض نقاط المجموعة الكلية قد لا تنتمي إلى أي مفتوح. وتعتمد هذه الدراسة تعريفات T_0، وT_1، وT_2 على اتحاد المجموعات المفتوحة، وفق التعريف 1.2 لدى Tyagi وChauhan [3]. كما استعملت الجوارات الناتجة من العلاقات الثنائية في بناء فضاءات تقريب ذات طوبولوجيا فوقية ودراسة مسلمات الفصل فيها، ومن الأعمال المرتبطة بذلك دراسة Toumi وAltoumi [4].

لتكن X مجموعة غير خالية، ولتكن $R \subseteq X \times X$ علاقة ثنائية اعتباطية. لكل $x \in X$، يعرف جوار الخلف وجوار السلف بالصيغتين:

$$R^+(x) = \{y \in X : xRy\}, \qquad R^-(x) = \{y \in X : yRx\}.$$

وتتناول الدراسة العائلة المولدة بجميع اتحادات جوارات الخلف:

$$\mu_R = \left\{ \bigcup_{a \in A} R^+(a) : A \subseteq X \right\}.$$

هذه العائلة طوبولوجيا معممة، ومجموعة دعمها هي:

$$M_{\mu_R} = \bigcup_{U \in \mu_R} U = \mathrm{Range}(R).$$

وبالتالي، لا يفترض أن تكون μ_R قوية، وتطبق مسلمات الفصل المعتمدة على النقاط المتميزة في M_{μ_R}.

تتمثل مشكلة الدراسة في تحديد العلاقة الدقيقة بين بنية الجوارات وخصائص الفصل في (X, μ_R)، وفي معرفة أثر إضافة الأزواج الانعكاسية أو المعكوسة إلى العلاقة في هذه الخصائص. ويهدف البحث إلى

صياغة شروط علاقية لازمة وكافية لتحقق T_0، وT_1، وT_2، بواسطة مجموعات السلف وجوارات الخلف، دون فرض الانعكاسية أو التناظر أو التعدي على العلاقة الأصلية.

ويشمل التحليل تصنيف الفصل عندما لا يتجاوز حجم كل جوار خلف عنصرين، ودراسة الإغلاقين الانعكاسي والتناظري، وتحديد شروط الفصل بعد هاتين العمليتين للعلاقات المحددة بتبديلات منتهية. وتعتمد المعالجة على المبرهنات والبراهين والأمثلة المضادة، مع توضيح الفرضيات وحدود كل نتيجة.

تبدأ الدراسة بمراجعة الأعمال ذات الصلة وتحديد موقع البناء المعتمد، ثم تعرض التعريفات وخصائص التوليد. وتعقب ذلك التوصيفات العلاقية والتصنيفات الخاصة، ثم مناقشة صلتها بالنتائج المنشورة، وتختتم بخلاصة النتائج المثبتة.

2. الدراسات السابقة وموقع الدراسة

قدم Császár إطارا لدراسة الطوبولوجيات والاستمرارية المعممة [1]، ثم تناول مسلمات الفصل باستخدام مجموعات مفتوحة أعم من المفتوحات الطوبولوجية الاعتيادية [2]. ويتيح هذا الإطار معالجة عائلات مغلقة تحت الاتحادات الاعتباطية دون اشتراط انغلاقها تحت التقاطعات المنتهية، وهو الأساس البنيوي للعائلة المولدة بالجوارات في الدراسة الحالية [3].

اعتمد Tyagi وChauhan تعريف مسلمات T_0, T_1, T_2 باستخدام النقاط المتميزة من مجموعة الدعم M_μ [3، التعريف 1.2]. وقدما توصيفا لـT_0 باختلاف إغلاقي النقطتين، وتوصيفا لـT_1 بانغلاق المجموعة

$$\{x\} \cup \left(X \setminus M_\mu\right)$$

لكل $x \in M_\mu$ [3، المبرهنتان 2.5 و2.6]. تمثل هذه النتائج أساسا معروفا لدراسة الفصل في الفضاءات المعممة، وتوضح ضرورة مراعاة مجموعة الدعم عند استخدام إغلاق النقاط.

استخدم Lashin وآخرون الطوبولوجيا المستحثة بعلاقات ثنائية لتعميم مفاهيم المجموعات التقريبية، ضمن معالجة تعتمد فضاءات طبولوجية اعتيادية [11].

في فضاءات التقريب المعممة، درس Yang وXu مسلمات T_0, T_1, T_2 في فضاءات التقريب الطوبولوجية، ثم امتدادها إلى فضاءات التقريب المرتبطة بعلاقات ثنائية عامة. وتستخدم الدراسة جواري الخلف والسلف، مع معالجة العلاقات ذات الترتيب المسبق وصلتها بفضاءات Alexandrov [5]. كما بحث Wu وLiu الطوبولوجيات المستحثة بعلاقات ثنائية اعتباطية، وقدما توصيفات مكافئة لمسلمات الفصل إلى جانب خواص طبولوجية أخرى [6]. وتثبت هذه الأعمال أن معالجة الفصل من خلال العلاقات الثنائية لها سوابق مباشرة في الأدبيات، ودرس Yu وZhan خواص الطوبولوجيات المرتبطة بالعلاقات الثنائية، وبينا تساوي الطوبولوجيا المستحثة بعلاقة انعكاسية مع الطوبولوجيا المستحثة بإغلاقها التعدي، وتساوي الطوبولوجيا المستحثة بعلاقة انعكاسية متناظرة مع الطوبولوجيا المستحثة بإغلاق تكافئها، وفقا للبناء المستخدم في دراستهما [12].

وتناولت دراسات أخرى البنى من نوع supra-topology المولدة بأنظمة الجوارات. فقد أنشأ Al-shami وAlshammari ثمانية أنواع من هذه البنى باستخدام جوارات ناشئة عن علاقات ثنائية اعتباطية، ودرسا مؤثرات التقريب المرتبطة بها [7]. ودرس Toumi وAltoumi فضاءات تقريب مبنية على جوارات

اليمين وبنية supra-topology، وتناولا مسلمات T_0, T_1, T_2 وخواصها [4]. ترتبط هذه الدراسات بموضوع البحث من حيث استخدام الجوارات وبنى لا تشترط الانغلاق تحت التقاطعات المنتهية، ولذلك تتطلب المقارنة معها فحص تعريف العائلة المولدة وفروض العلاقة وصيغ توصيفات الفصل.

وفي سياق الرسوم، درس Sutha Devi وEswari مؤثرات تولد بنيتي G-supra وG-infra من الرسوم البسيطة غير الموجهة، وتناولا خواص الاتصال والفصل [8]. كما تناول Fathi وArif وAbdalbaqi مسلمات الفصل في الرسوم المزودة ببنى supra-topological [9]. توفر هذه الأعمال سياقا للمقارنة مع الحالات العلاقية المتناظرة، مع مراعاة اختلاف جوارات الرؤوس وطرق توليد عائلات المفتوحات.

تتحدد معالجة الدراسة الحالية بالعائلة

$$\mu_R = \left\{ \bigcup_{a \in A} R^+(a) : A \subseteq X \right\},$$

حيث R علاقة ثنائية اعتباطية على المجموعة غير الخالية X، وتكون مجموعة الدعم

$$M_{\mu_R} = \mathrm{Range}(R).$$

ويعتمد الفصل على نقاط هذه المجموعة وفقا للتعريف في [3]. ينصب التحليل على توصيف T_0, T_1, T_2 بدلالة جوارات السلف والخلف، ثم دراسة حالة الجوارات التي لا يتجاوز حجمها عنصرين، وأثر الإغلاقين الانعكاسي والتناظري على تحقق مسلمات الفصل، مع تطبيق ذلك على علاقات التبديلات في المجموعات المنتهية.

وعند اعتبار μ_R عائلة على دعمها غير الخالي، تكون طوبولوجيا معممة قوية؛ لذلك تشمل المقارنة أدبيات supra-topology أيضا. وعليه، يتحدد موقع الدراسة في التحليل المباشر لبنية مولدات μ_R، وعلاقتها بالفصل، وسلوكها تحت تعديل العلاقة، مع الاستناد إلى التوصيفات العامة المعروفة في الفضاءات المعممة.

3. التعريفات والبناء العلاقي

1.3. الجوارات العلاقية والطوبولوجيا المعممة

لتكن X مجموعة غير خالية، ولتكن $R \subseteq X \times X$ علاقة ثنائية اعتباطية. نكتب xRy عندما $(x, y) \in R$، ونعرف جوار الخلف وجوار السلف للنقطة $x \in X$، على الترتيب، بالصيغتين [5، 10]:

$$R^+(x) = \{y \in X : xRy\},$$

$$R^-(x) = \{y \in X : yRx\}.$$

تستخدم كلمة الجوار هنا بالمعنى العلاقي؛ فقد يكون الجوار خاليا، وقد لا يحتوي النقطة التي يعرف عندها.

لتكن $\mathcal{P}(X)$ مجموعة أجزاء X. تسمى العائلة $\mu \subseteq \mathcal{P}(X)$ طوبولوجيا معممة على X إذا كانت $\varnothing \in \mu$، وكانت مغلقة تحت الاتحادات الاعتباطية [1، 3]. وتسمى عناصرها مجموعات μ-مفتوحة، وتسمى $F \subseteq X$ مجموعة μ-مغلقة إذا كان $X \setminus F \in \mu$. وتعرف مجموعة الدعم بالصورة

$$M_\mu = \bigcup_{U \in \mu} U.$$

وتكون μ قوية إذا كان $M_\mu = X$، وهو ما يكافئ $X \in \mu$. ولكل $A \subseteq X$، يعرف إغلاق A بالصورة [3، ص 10]:

$$c_\mu(A) = \bigcap\{F \subseteq X : A \subseteq F,\ X \setminus F \in \mu\}.$$

وبحسب معيار الإغلاق، تنتمي النقطة y إلى $c_\mu(A)$ إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة μ-مفتوحة تحتوي y تلتقي A [3، اللمّة 1.1(i)].

2.3. مسلمات الفصل المعتمدة

تعتمد الدراسة تعريفات الفصل على مجموعة الدعم وفقا لـ[3، التعريف 1.2]. ولكل نقطتين متميزتين $x, y \in M_\mu$، يعرف تحقق المسلمات كما يأتي:

- **T_0:** توجد مجموعة $U \in \mu$ تحتوي إحدى النقطتين فقط؛ أي

$$|U \cap \{x, y\}| = 1.$$

- **T_1:** توجد مجموعتان $U, V \in \mu$ بحيث

$$x \in U, \quad y \notin U, \qquad y \in V, \quad x \notin V.$$

- **T_2:** توجد مجموعتان $U, V \in \mu$ بحيث

$$x \in U, \qquad y \in V, \qquad U \cap V = \varnothing.$$

وتتحقق المسلمات الثلاث إذا كان $|M_\mu| \leq 1$، لعدم وجود نقطتين متميزتين في الدعم.

3.3. توليد الطوبولوجيا المعممة ومجموعة الدعم وإغلاق النقطة

نعرف العائلة المولدة بالعلاقة R كما يأتي:

$$\mathcal{B}_R = \{R^+(a) : a \in X\},$$

$$\mu_R = \left\{\bigcup_{a \in A} R^+(a) : A \subseteq X\right\},$$

مع اعتبار الاتحاد على المجموعة الخالية مساويا للمجموعة الخالية.

قضية 1.3. العائلة μ_R هي أصغر طوبولوجيا معممة على X تحتوي $\mathcal{B}_R$، ومجموعة دعمها هي

$$M_{\mu_R} = \mathrm{Range}(R),$$

حيث

$$\mathrm{Range}(R) = \{y \in X : \exists a \in X,\ aRy\}.$$

ومن ثم تكون μ_R قوية إذا وفقط إذا كان $\mathrm{Range}(R) = X$.

البرهان. ينتج $\varnothing \in \mu_R$ باختيار $A = \varnothing$. ولتكن $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mu_R$، ولنضع

$$A_i = \{a \in X : R^+(a) \subseteq U_i\}.$$

من تعريف μ_R، لدينا $U_i = \bigcup_{a \in A_i} R^+(a)$، ولذلك

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{a \in \bigcup_{i \in I} A_i} R^+(a) \in \mu_R.$$

إذن μ_R طوبولوجيا معممة، وهي تحتوي كل عنصر من $\mathcal{B}_R$. وإذا كانت ν طوبولوجيا معممة تحتوي $\mathcal{B}_R$، فإن انغلاقها تحت الاتحادات يقتضي $\mu_R \subseteq \nu$، فتثبت الأصغرية. كذلك، من تعريف التوليد،

$$M_{\mu_R} = \bigcup_{a \in X} R^+(a) = \mathrm{Range}(R).$$

ويترتب شرط القوة من تعريفها. ▫

قضية 2.3. لكل $x \in X$، يتحقق

$$c_{\mu_R}(\{x\}) = \{y \in X : R^-(y) \subseteq R^-(x)\}.$$

كما يتحقق

$$c_{\mu_R}(\varnothing) = X \setminus M_{\mu_R}.$$

البرهان. لتكن $y \in X$. وفقا لمعيار الإغلاق، لا تنتمي y إلى $c_{\mu_R}(\{x\})$ إذا وفقط إذا وجدت مجموعة $U \in \mu_R$ تحتوي y ولا تحتوي x. وبما أن U اتحاد لجوارات الخلف، فإن ذلك يكافئ وجود $a \in X$ بحيث

$$y \in R^+(a), \qquad x \notin R^+(a).$$

وهذا يكافئ وجود عنصر في $R^-(y) \setminus R^-(x)$. وبالعكس، فإن جوار الخلف لأي عنصر من هذا الفرق مجموعة مفتوحة تحتوي y ولا تحتوي x. ومن ثم

$$y \notin c_{\mu_R}(\{x\}) \Leftrightarrow R^-(y) \not\subseteq R^-(x),$$

فتثبت الصيغة الأولى. أما الانتماء إلى إغلاق المجموعة الخالية فيكافئ عدم وجود مجموعة مفتوحة تحتوي النقطة؛ أي وجودها خارج M_{μ_R}، فتثبت الصيغة الثانية. ▫

مثال 1.3. لتكن

$$X = \{1,2,3,4\},$$

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3)\}.$$

عندئذ

$$\mu_R = \{\varnothing, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\},$$

$$M_{\mu_R} = \{1,2,3\}.$$

هذه الطوبولوجيا المعممة غير قوية على X، كما أنها غير مغلقة تحت التقاطعات المنتهية، إذ

$$\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\} \notin \mu_R.$$

وبتطبيق القضية 2.3 نحصل على

$$c_{\mu_R}(\varnothing) = \{4\}, \qquad c_{\mu_R}(\{1\}) = \{1,4\}.$$

4. النتائج الرئيسية

تقدم التوصيفات الآتية شروطا علاقية مكافئة لتحقق مسلمات الفصل T_0، T_1، T_2 في الفضاء (X, μ_R)، وفقا لتعريفات الفصل على مجموعة الدعم. وتمهد هذه الشروط لدراسة العلاقات التي لا يتجاوز حجم جوارات الخلف فيها اثنين، وأثر الإغلاقين الانعكاسي والتناظري، وتطبيقات على العلاقات المحددة بتبديلات المجموعات المنتهية.

1.4. التوصيفات العلاقية لمسلمات الفصل

تعبر التوصيفات التالية عن مسلمات الفصل بدلالة جواري السلف والخلف. ويتفق توصيفا T_0 وT_1 مع المعيارين العامين بدلالة إغلاق النقاط والمجموعات المغلقة الواردين في [3، المبرهنتان 2.5 و2.6، ص 16].

مبرهنة 1.4. تتحقق التوصيفات الآتية للفضاء (X, μ_R):

(أ) يتحقق T_0 إذا وفقط إذا كان، لكل نقطتين متميزتين $x, y \in M_{\mu_R}$،

$$R^-(x) \neq R^-(y).$$

(ب) يتحقق T_1 إذا وفقط إذا كان، لكل نقطتين متميزتين $x, y \in M_{\mu_R}$،

$$R^-(x) \nsubseteq R^-(y), \qquad R^-(y) \nsubseteq R^-(x).$$

(ج) يتحقق T_2 إذا وفقط إذا وجد، لكل نقطتين متميزتين $x, y \in M_{\mu_R}$، عنصران

$$a \in R^-(x), \qquad b \in R^-(y),$$

بحيث

$$R^+(a) \cap R^+(b) = \varnothing.$$

البرهان. لتكن $x, y \in M_{\mu_R}$ نقطتين متميزتين. نثبت أولا التكافؤ

$$(\exists U \in \mu_R : x \in U,\ y \notin U) \Leftrightarrow R^-(x) \setminus R^-(y) \neq \varnothing.$$

إذا وجدت مجموعة مفتوحة U تحتوي x ولا تحتوي y، فإن تعريف μ_R يعطي $A \subseteq X$ بحيث

$$U = \bigcup_{a \in A} R^+(a).$$

ومن انتماء x إلى هذا الاتحاد يوجد $a \in A$ بحيث $x \in R^+(a)$. وبما أن $R^+(a) \subseteq U$، فإن $y \notin R^+(a)$، ومن ثم

$$a \in R^-(x) \setminus R^-(y).$$

وبالعكس، إذا انتمى a إلى هذا الفرق، فإن المجموعة المفتوحة $R^+(a)$ تحتوي x ولا تحتوي y، فيثبت التكافؤ.

إثبات (أ). يتحقق فصل T_0 بين x وy إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة تحتوي إحداهما فقط. وبالتكافؤ السابق، يكافئ ذلك كون أحد الفرقين

$$R^-(x) \setminus R^-(y), \qquad R^-(y) \setminus R^-(x)$$

غير خال، وهو ما يكافئ اختلاف جواري السلف.

إثبات (ب). يتحقق فصل T_1 بين x وy إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة تحتوي x دون y، وأخرى تحتوي y دون x. وبالتكافؤ السابق في الاتجاهين، يكافئ ذلك عدم خلو كلي الفرقين، أي تحقق شرطي عدم الاحتواء.

إثبات (ج). افترض تحقق T_2. توجد مجموعتان $U, V \in \mu_R$ بحيث

$$x \in U, \qquad y \in V, \qquad U \cap V = \varnothing.$$

وبتمثيلهما اتحادين لجوارات الخلف، يمكن اختيار $a, b \in X$ بحيث

$$x \in R^+(a) \subseteq U, \qquad y \in R^+(b) \subseteq V.$$

إذن $a \in R^-(x)$، و$b \in R^-(y)$، كما أن

$$R^+(a) \cap R^+(b) \subseteq U \cap V = \varnothing.$$

وبالعكس، إذا وجد العنصران المحددان في (ج)، فإن $R^+(a)$ و$R^+(b)$ مجموعتان مفتوحتان ذواتا تقاطع خال، وتحتويان x وy، على الترتيب. ومن ثم يتحقق T_2. ▫

نتيجة 1.4. يتحقق T_1 في (X, μ_R) إذا وفقط إذا كان، لكل $x \in M_{\mu_R}$،

$$c_{\mu_R}(\{x\}) = \{x\} \cup \left(X \setminus M_{\mu_R}\right).$$

البرهان. إذا تحقق T_1، فإن المبرهنة 4.1(ب) تستبعد احتواء $R^-(y)$ في $R^-(x)$ لكل $y \in M_{\mu_R} \setminus \{x\}$. أما لكل $y \notin M_{\mu_R}$، فإن $R^-(y) = \varnothing$. لذلك تعطي القضية 2.3 صيغة الإغلاق المطلوبة. وبالعكس، إذا تحققت هذه الصيغة، فإن كل نقطتين متميزتين $x, y \in M_{\mu_R}$ تحققان

$$y \notin c_{\mu_R}(\{x\}), \qquad x \notin c_{\mu_R}(\{y\}).$$

وباستخدام القضية 2.3 نحصل على شرطي عدم الاحتواء في المبرهنة 1.4(ب)، فيتحقق T_1. ▫

يترتب من المبرهنة 1.4 أن

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

ولا ينعكس أي من الاستلزامين عموما، كما توضح الأمثلة التالية.

مثال 1.4. لتكن

$$X = \{1,2,3\}, \qquad R = \{(x,y) \in X \times X : x \neq y\}.$$

عندئذ، لكل $x \in X$،

$$R^+(x) = R^-(x) = X \setminus \{x\},$$

وبالتالي

$$\mu_R = \{\varnothing, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\}.$$

تختلف جوارات السلف الثلاثة وتتساوى أحجامها، فلا يحتوي أحدها الآخر، ومن ثم يتحقق T_1 بالمبرهنة 4.1(ب). لكن كل مجموعة مفتوحة غير خالية تحتوي عنصرين على الأقل؛ ولذلك تتقاطع أي مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين، فلا يتحقق T_2.

أما المثال 1.3 فيحقق T_0 ولا يحقق T_1: جوارات السلف للنقاط الثلاث في الدعم مختلفة، بينما

$$R^-(1) = \{1\} \subsetneq \{1,2\} = R^-(2).$$

2.4. مسلمات الفصل للجوارات ذات الحجم الأقصى اثنين

نفترض أن

$$|R^+(a)| \leq 2 \qquad (a \in X).$$

ونعرف

$$D_R = \{x \in M_{\mu_R} : \exists a \in X,\ R^+(a) = \{x\}\},$$

ولكل $x \in M_{\mu_R}$، نضع

$$N_R(x) = \{y \in M_{\mu_R} \setminus \{x\} : \exists a \in X,\ R^+(a) = \{x,y\}\}.$$

إذا كان $x \in M_{\mu_R} \setminus D_R$، فإن $N_R(x) \neq \varnothing$؛ إذ ينتمي x إلى جوار مولد، بحكم انتمائه إلى الدعم، وهذا الجوار يحتوي عنصرين.

مبرهنة 4.2. تحت فرض الحجم السابق، تتحقق التوصيفات الآتية:

(أ) يتحقق T_0 إذا وفقط إذا لم توجد نقطتان متميزتان $x, y \in M_{\mu_R} \setminus D_R$ بحيث

$$N_R(x) = \{y\}, \qquad N_R(y) = \{x\}.$$

(ب) يتحقق T_1 إذا وفقط إذا كان، لكل $x \in M_{\mu_R} \setminus D_R$،

$$|N_R(x)| \geq 2.$$

(ج) يتحقق T_2 إذا وفقط إذا تحقق شرط الحجوم في (ب)، ولم توجد ثلاث نقاط متميزة $x, y, z \in M_{\mu_R}$، مع $x, y \notin D_R$، بحيث

$$N_R(x) = \{y, z\}, \qquad N_R(y) = \{x, z\}.$$

البرهان.

(أ) وفقا للمبرهنة 1.4، يتعذر فصل نقطتين بمسلمة T_0 إذا وفقط إذا كان كل جوار مولد يحتوي إحداهما يحتوي الأخرى. وتحت فرض الحجم، يكافئ ذلك عدم وجود جوار أحادي لأي منهما، وكون كل جوار مولد يحتوي إحداهما مساويا لـ$\{x, y\}$. وبما أن النقطتين تنتميان إلى الدعم، فهذا يكافئ تماما الشرط المستبعد في (أ).

(ب) إذا كان $x \in M_{\mu_R} \setminus D_R$ و$N_R(x) = \{y\}$، فإن كل جوار مولد يحتوي x يحتوي y، فتخفق T_1. وبما أن $N_R(x)$ غير خالية، يلزم شرط الحجوم. وبالعكس، افترض تحقق هذا الشرط، ولتكن $x, y \in M_{\mu_R}$ متميزتين. إذا كان $x \in D_R$، فإن $\{x\}$ مجموعة مفتوحة تحتوي x ولا تحتوي y. وإلا أمكن اختيار

$$u \in N_R(x) \setminus \{y\},$$

فتكون $\{x, u\}$ مجموعة مفتوحة تحتوي x ولا تحتوي y. وبتبادل النقطتين نحصل على الفصل في الاتجاه الآخر، فيتحقق T_1.

(ج) يلزم من T_2 تحقق T_1، ومن ثم شرط (ب). وإذا وجدت النقاط الثلاث المذكورة، فإن الجوارات المولدة المحتوية على x هي من الشكلين $\{x, y\}$ و$\{x, z\}$، والمحتوية على y هي من الشكلين $\{x, y\}$ و$\{y, z\}$. ويتقاطع كل جوار من العائلة الأولى مع كل جوار من الثانية، فتخفق T_2 بالمبرهنة 4.1(ج).

وبالعكس، افترض تحقق الشرطين في (ج)، ولتكن $x, y \in M_{\mu_R}$ متميزتين. إذا كانت إحدى النقطتين في D_R، فإن مجموعتها الأحادية المفتوحة، مع مجموعة مفتوحة تحتوي النقطة الأخرى وتتجنب الأولى بمسلمة T_1، تحقق الفصل المطلوب. وإذا كان $x, y \notin D_R$، فنضع

$$A = N_R(x) \setminus \{y\}, \qquad B = N_R(y) \setminus \{x\}.$$

المجموعتان A, B غير خاليتين. وإذا تعذر اختيار $u \in A$ و$v \in B$ بحيث $u \neq v$، لزم

$$A = B = \{z\}$$

لنقطة z مختلفة عن x, y. وبشرط الحجوم ينتج

$$N_R(x) = \{y, z\}, \qquad N_R(y) = \{x, z\},$$

وهو الترتيب المستبعد. لذلك يوجد اختيار يحقق $u \neq v$، وتكون المجموعتان المفتوحتان $\{x,u\}$ و$\{y,v\}$ متباينتين، لأن

$$\{x,u\} \cap \{y,v\} = \varnothing.$$

ومن ثم يتحقق T_2. ▫

مثال 4.2. لتكن $X = \{1,2,3,4\}$، ولتكن R محددة بجوارات الخلف الآتية:

$$\begin{aligned} R^+(1) &= \{1,2\}, \quad R^+(2) = \{2,3\}, \\ R^+(3) &= \{3,4\}, \quad R^+(4) = \{4,1\}. \end{aligned}$$

عندئذ $D_R = \varnothing$، ولدينا

$$N_R(1) = N_R(3) = \{2,4\}, \qquad N_R(2) = N_R(4) = \{1,3\}.$$

إذن يتحقق شرط الحجوم، ولا توجد ثلاث نقاط بالمواصفات الواردة في المبرهنة 4.2(ج). ولذلك يتحقق T_2، مع عدم انتماء أي مجموعة أحادية العنصر إلى μ_R.

4.3. أثر الإغلاق الانعكاسي والتناظري

لعلاقة ثنائية اعتباطية R على X، نعرف

$$\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}, \qquad R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\},$$

ونضع

$$R_{\text{ref}} = R \cup \Delta_X, \qquad R_{\text{sym}} = R \cup R^{-1}.$$

ولكل $x \in X$، نكتب

$$S_R(x) = R^+(x) \cup R^-(x).$$

يمثل $S_R(x)$ اتحاد جواري السلف والخلف، وهو من أنماط الجوارات العلاقية التي تناولها Yao [10].

من التعريف نحصل على

$$\begin{aligned} R^+_{\text{ref}}(x) &= R^+(x) \cup \{x\}, \\ R^-_{\text{ref}}(x) &= R^-(x) \cup \{x\}, \\ R^+_{\text{sym}}(x) &= R^-_{\text{sym}}(x) = S_R(x). \end{aligned}$$

وبالقضية 1.3،

$$M_{\mu_{R_{\text{ref}}}} = X, \qquad M_{\mu_{R_{\text{sym}}}} = \text{Dom}(R) \cup \text{Range}(R),$$

حيث

$$\text{Dom}(R) = \{x \in X : \exists y \in X,\ xRy\}.$$

مبرهنة 4.3. لتكن R متضادة التناظر؛ أي إن xRy وyRx يستلزمان $x = y$ لكل $x, y \in X$. عندئذ:

(أ) يحقق $\left(X, \mu_{R_{\text{ref}}}\right)$ المسلمة T_0.

(ب) إذا كان (X, μ_R) يحقق T_1، فإن $\left(X, \mu_{R_{\text{ref}}}\right)$ يحقق T_1 إذا وفقط إذا كان

$$\text{Dom}(R) \subseteq \text{Range}(R).$$

البرهان.

(أ) إذا تساوى جوارا السلف بعد الإغلاق لنقطتين متميزتين x, y، فإن

$$R^-(x) \cup \{x\} = R^-(y) \cup \{y\}.$$

ومن ذلك ينتج xRy وyRx، خلافا لتضاد التناظر. لذلك يتحقق T_0 بالمبرهنة 4.1(أ).

(ب) لإثبات الضرورة، افترض وجود

$$x \in \text{Dom}(R) \setminus \text{Range}(R).$$

اختر y بحيث xRy. عندئذ $x \neq y$، و$R^-(x) = \varnothing$، ولذلك

$$R^-_{\text{ref}}(x) = \{x\} \subseteq R^-_{\text{ref}}(y).$$

وهذا يناقض T_1 بالمبرهنة 1.4(ب).

ولإثبات الكفاية، افترض شرط الاحتواء، ولتكن $x, y \in X$ متميزتين. إذا كان

$$R^-(x) \cup \{x\} \subseteq R^-(y) \cup \{y\},$$

فإن xRy، ومن ثم تنتمي النقطتان إلى $\text{Range}(R)$. وبمسلمة T_1 للفضاء الأصلي يوجد

$$a \in R^-(x) \setminus R^-(y).$$

لكن الاحتواء المفترض يقتضي $a = y$، فينتج yRx، خلافا لتضاد التناظر. إذن لا يحدث الاحتواء بين جواري السلف بعد الإغلاق لأي زوج متميز، فيتحقق T_1. ▫

نتيجة 4.2. لأي علاقة R، تتحقق مسلمات الفصل في $\left(X, \mu_{R_{\text{sym}}}\right)$ بالشروط الآتية، على أن يتحقق الشرط الموافق لكل نقطتين متميزتين $x, y \in M_{\mu_{R_{\text{sym}}}}$:

(أ) T_0 إذا وفقط إذا كان

$$S_R(x) \neq S_R(y).$$

(ب) T_1 إذا وفقط إذا كان

$$S_R(x) \not\subseteq S_R(y), \qquad S_R(y) \not\subseteq S_R(x).$$

(ج) T_2 إذا وفقط إذا وجد عنصران $a \in S_R(x)$ و $b \in S_R(y)$ بحيث

$$S_R(a) \cap S_R(b) = \varnothing.$$

البرهان. تنتج التوصيفات من المساواة بين جواري السلف والخلف للعلاقة R_{sym}، ومن تطبيق المبرهنة 4.1. ▫

مثال 4.3. في العلاقات الثلاث الآتية، تكون جوارات الخلف مجموعات أحادية تغطي X، ومن ثم $\mu_R = \mathcal{P}(X)$ ويتحقق T_2:

(أ) إذا كان

$$X = \{1,2\}, \qquad R = \{(1,2),(2,1)\},$$

فإن

$$\mu_{R_{\text{ref}}} = \{\varnothing, X\}.$$

إذن يخفق T_0، وبالتالي يخفق T_1 و T_2.

(ب) إذا كان

$$X = \{1,2,3\}, \qquad R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\},$$

فإن $\mu_{R_{\text{ref}}}$ تساوي العائلة الواردة في المثال 4.1؛ فتتحقق T_1 وتخفق T_2، رغم تضاد تناظر R.

(ج) إذا كان

$$X = \{1,2,3,4\}, \qquad R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\},$$

فإن

$$S_R(1) = S_R(3) = \{2,4\}.$$

لذلك يخفق T_0 بعد الإغلاق التناظري بالنتيجة 2.4 (أ)، فتخفق المسلمات الثلاث.

4.4. تصنيف الفصل للعلاقات المحددة بتبديلات منتهية

لتكن X مجموعة منتهية غير خالية، وليكن $f: X \to X$ تبديلا، أي تقابلا من X إلى نفسها. نعرف العلاقة

$$R_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

يقصد بطول دورة النقطة x أصغر عدد صحيح موجب n يحقق $f^n(x) = x$. ونستخدم ترميز الإغلاقين المعتمد في 3.4، فتكون جوارات الخلف

$$\begin{aligned} R_f^+(x) &= \{f(x)\}, \\ (R_f)_{\text{ref}}^+(x) &= \{x, f(x)\}, \\ (R_f)_{\text{sym}}^+(x) &= \{f(x), f^{-1}(x)\}. \end{aligned}$$

وبتقابل f، تكون مجموعة الدعم X في الحالات الثلاث.

مبرهنة 4.4. الشروط الآتية لازمة وكافية لتحقق مسلمات الفصل في الطوبولوجيات المعممة المولدة بالعلاقات المبينة. ويتكافأ T_0 و T_1 لكل من الإغلاقين.

العلاقة المولدة	T_0 وT_1 شرط تحقق كل من	T_2 شرط تحقق
R_f	يتحققان لكل تبديل	يتحقق لكل تبديل
$(R_f)_{\text{ref}}$	2 لا توجد دورة بطول	$\{2,3\}$ لا توجد دورة بطول من
$(R_f)_{\text{sym}}$	4 لا توجد دورة بطول	$\{3,4,6\}$ لا توجد دورة بطول من

البرهان.

(أ) العلاقة الأصلية. جوارات الخلف هي جميع المجموعات الأحادية في X، ولذلك

$$\mu_{R_f} = \mathcal{P}(X).$$

ومن ثم تتحقق المسلمات الثلاث.

(ب) الإغلاق الانعكاسي. وفقا لتعريفات 4.2،

$$D_{(R_f)_{\text{ref}}} = \{x \in X : f(x) = x\},$$

ولكل نقطة خارج هذه المجموعة،

$$N_{(R_f)_{\text{ref}}}(x) = \{f(x), f^{-1}(x)\}.$$

على دورة طولها 2، يتساوى العنصران في الصيغة السابقة، وتحقق نقطتا الدورة الشرط المستبعد في المبرهنة 4.2(أ). لذلك تخفق T_0 و T_1. أما على دورة طولها $n \geq 3$، فالعنصران مختلفان؛ ومن ثم يتحقق T_1، وبالتالي T_0، عند غياب الدورات الثنائية.

ولفحص T_2، افترض غياب هذه الدورات. يظهر ترتيب النقاط الثلاث المستبعد في المبرهنة 4.2(ج) على دورة غير أحادية إذا وفقط إذا كان طولها 3. بالفعل، إذا تحقق ذلك الترتيب، فإن $y = f(x)$ أو $y = f^{-1}(x)$، وفي كلتا الحالتين تقتضي المساواة $N_{(R_f)_{\text{ref}}}(y) = \{x, z\}$ أن

$$f^3(x) = x.$$

وبما أن طول الدورة لا يقل عن 3، فهو يساوي 3. وبالعكس، تحقق نقاط كل دورة ثلاثية هذا الترتيب. وهكذا ينتج شرط T_2 للإغلاق الانعكاسي.

(ج) الإغلاق التناظري. المجموعات الأحادية تتولد بالضبط لنقاط الدورات ذات الطول 1 أو 2، ولذلك

$$D_{(R_f)_{\mathrm{sym}}} = \{x \in X : f^2(x) = x\}.$$

ولكل نقطة خارج هذه المجموعة،

$$N_{(R_f)_{\mathrm{sym}}}(x) = \{f^2(x), f^{-2}(x)\}.$$

فالجوارات المولدة المحتوية على x هي المعرفة عند $f(x)$ و$f^{-1}(x)$، ويكون عنصرها الآخر $f^2(x)$ أو $f^{-2}(x)$، على الترتيب.

إذا كان طول الدورة 4، فإن هذين العنصرين يتساويان، وتحقق النقطتان $x, f^2(x)$ الشرط المستبعد في المبرهنة 4.2(أ). أما لبقية الدورات غير الأحادية والثنائية، فالعنصران مختلفان. لذلك يتحقق كل من T_0 وT_1 إذا وفقط إذا غابت الدورات الرباعية.

بعد استبعادها، تنطبق حجة النقاط الثلاث السابقة على f^2 بدلا من f. ويظهر الترتيب المستبعد إذا وفقط إذا كانت دورة f^2 بطول 3، أي إذا كان

$$f^6(x) = x, \qquad f^2(x) \neq x.$$

وهذا يكافئ كون طول دورة f مساويا لـ3 أو 6، لأن الطول يقسم 6 ولا يقسم 2. وبالمبرهنة 4.2(ج) يثبت شرط T_2 للإغلاق التناظري. وتفصل نقاط الدورات المختلفة بجوارات مولدة داخل تلك الدورات، فيكتمل التصنيف على X. ▫

مثال 4.4. على المجموعة $X = \{1,2,3,4,5,6\}$، ليكن

$$f = (1\,2\,3\,4\,5\,6).$$

يحقق $\left(X, \mu_{(R_f)_{\mathrm{ref}}}\right)$ المسلمة T_2، بينما يحقق $\left(X, \mu_{(R_f)_{\mathrm{sym}}}\right)$ المسلمة T_1 ويخفق في T_2. ويظهر سبب الإخفاق من

$$N_{(R_f)_{\mathrm{sym}}}(1) = \{3,5\}, \qquad N_{(R_f)_{\mathrm{sym}}}(3) = \{1,5\},$$

إذ تتحقق بالنقاط 1,3,5 الحالة المستبعدة في المبرهنة 4.2(ج).

5. مناقشة النتائج

تربط المبرهنة 4.1 الفصل ببنية جوارات السلف والخلف. ويعبر توصيفا T_0 وT_1 عن المعايير العامة المعروفة بإغلاق النقاط، بعد تطبيق صيغة الإغلاق في القضية 2.3؛ ومن ثم تتحدد فائدتهما في تحويل تلك المعايير إلى شروط مباشرة على العلاقة [3، المبرهنتان 2.5 و2.6، ص 16]. أما توصيف T_2، فيتيح فحص الفصل بواسطة جوارات الخلف المولدة نفسها، لأن كل مفتوح يحتوي نقطة يحتوي أحد هذه المولدات المشتمل عليها. ولا يتطلب هذا الاستدلال الانغلاق تحت التقاطعات المنتهية.

توجد صلة مباشرة بمعالجة Toumi وAltoumi، التي تستخدم جوارات اليمين وتعرض توصيفي T_0 وT_1 بإغلاق النقاط وانغلاق المجموعات الأحادية، على الترتيب [4، القضيتان 1.3 و2.3، ص 15–16]. كما تتطابق عائلة المفتوحات في المثال 2.1 من تلك الدراسة مع μ_R للعلاقة الواردة فيه [4، ص 11]. وتقتضي المقارنة مراعاة مجموعة الدعم: فعند اعتبار μ_R عائلة على $M_{\mu_R} \neq \varnothing$، تكون طوبولوجيا معممة قوية، وتبقى مسلمات الفصل المعتمدة دون تغيير. لذلك تشمل الصلة بالأدبيات نماذج supra-topology، حتى عندما تكون μ_R غير قوية على X.

تعطي المبرهنة 4.2، تحت فرض أن حجم كل جوار خلف لا يتجاوز عنصرين، شروطا لازمة وكافية بدلالة المجموعات D_R و$N_R(x)$. ويتحدد إخفاق الفصل بترتيبات محددة بين النقاط والمولدات الثنائية، مما يسمح بالتحقق المباشر من الأمثلة المنتهية. ويوضح المثال 4.2 إمكان تحقق T_2 مع غياب المفتوحات الأحادية في فضاء منته، بينما يبين المثال 4.1 أن T_1 لا يستلزم T_2. وتبرز هذه الأمثلة أثر غياب شرط التقاطعات المنتهية في سلوك الفصل.

تكشف نتائج الإغلاقين الانعكاسي والتناظري أن احتواء علاقة في أخرى لا يقتضي احتواء الطوبولوجيا المعممة المولدة بالأولى في المولدة بالثانية؛ إذ تؤدي إضافة الأزواج إلى تغيير المولدات نفسها. وتفسر هذه الملاحظة أمثلة فقد الفصل في 4.3، مع اتساقها مع النتيجة العامة التي تحفظ مسلمات الفصل عند الانتقال إلى طوبولوجيا معممة أدق ذات مجموعة الدعم نفسها [3، المبرهنة 1.16، ص 14]. وعندما تكون R مضادة للتناظر ويحقق (X, μ_R) المسلمة T_1، تحدد المبرهنة 4.3 شرط الحفظ بعد الإغلاق الانعكاسي بالصورة

$$\mathrm{Dom}(R) \subseteq \mathrm{Range}(R).$$

ويعني هذا الشرط أن كل نقطة خارج الدعم ليس لها جوار خلف غير خال. أما حفظ T_2، فلا ينتج من هذه الفروض، كما يوضح مثال التبديل الدوري الثلاثي، تختلف هذه المعالجة عن نتائج Yu وZhan المتعلقة بثبات طوبولوجيا مستحثة تحت الإغلاق التعدي أو إغلاق التكافؤ، تحت فروض محددة؛ إذ تعتمد الدراسة الحالية جميع اتحادات جوارات الخلف، وتبحث أثر الإغلاقين الانعكاسي والتناظري في مسلمات الفصل [12].

يترجم التصنيف في المبرهنة 4.4 شروط المبرهنة 4.2 إلى قيود على أطوال دورات التبديل. وتوضح الدورة السداسية تحديدا اختلاف أثر الإغلاقين: يحقق الإغلاق الانعكاسي T_2، بينما يحقق الإغلاق التناظري T_1 ويخفق في T_2. ويرتبط الإخفاق الثاني بظهور دورة ثلاثية عند الانتقال من f إلى f^2، وفقا لصيغة $N_{(R_f)_{\mathrm{sym}}}(x)$. ويقتصر هذا التصنيف على تبديلات المجموعات المنتهية، بينما تصح التوصيفات في المبرهنة 4.1 دون فرض منتهية X.

وتختلف مولدات هذا التصنيف عن الجوارات المغلقة المستخدمة في معالجة الدورات لدى Sutha Devi و.Eswari ففي برهان المبرهنة 5.1 من [8، ص 537] تستخدم المجموعات

$$\{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\},$$

وتقرر المبرهنة تحقق T_2 للدورة C_n عندما $n \geq 6$. أما الإغلاق التناظري لعلاقة التبديل الدوري فتكون جواراته

$$(R_f)^{+}_{\text{sym}}(v_i) = \{v_{i-1}, v_{i+1}\},$$

حيث $f(v_i) = v_{i+1}$ وتقرأ المؤشرات دوريا. ومن ثم يرتبط اختلاف حكم الفصل للدورة السداسية باختلاف المولدات الثلاثية والثنائية. وتؤكد هذه المقارنة ضرورة تحديد عائلة المفتوحات وفروض العلاقة عند مقارنة نتائج الفصل، إلى جانب تحديد الرسم أو العلاقة المولدة.

6. الخاتمة

تناولت الدراسة مسلمات الفصل T_0, T_1, T_2 في الطوبولوجيا المعممة μ_R المولدة بجميع اتحادات جوارات الخلف لعلاقة ثنائية اعتباطية R، مع اعتماد الفصل على مجموعة الدعم M_{μ_R}. وتم توصيف T_0 باختلاف جوارات السلف للنقاط المتميزة، و T_1 بعدم احتواء أي من جواري السلف في الآخر، و T_2 بإمكان اختيار جوارين مولدين يحتويان النقطتين على الترتيب ويكون تقاطعهما خاليا.

وفي حالة الجوارات التي لا يتجاوز حجمها عنصرين، تم الحصول على شروط لازمة وكافية للفصل بدلالة المولدات الأحادية والثنائية. وبينت الأمثلة أن T_1 لا يستلزم T_2، وأن تحقق T_2 في فضاء معمم منته لا يقتضي انفتاح المجموعات الأحادية، مما يوضح أثر غياب شرط الانغلاق تحت التقاطعات المنتهية.

كما تبين أن الإغلاقين الانعكاسي والتناظري لا يحفظان مسلمات الفصل عموما. وعندما تكون R مضادة للتناظر، يتحقق T_0 بعد الإغلاق الانعكاسي؛ وإذا تحقق T_1 قبل هذا الإغلاق، فإن حفظه يكافئ احتواء مجال R في مداها. وأظهر تصنيف علاقات التبديلات المنتهية تكافؤ T_0 و T_1 لكل من الإغلاقين، وحدد شروط تحقق T_2 بدلالة أطوال الدورات. ويمكن توسيع التحليل إلى جوارات أكبر حجما، مع دراسة أنماط التقاطع التي تحول دون تحقق T_2.

المراجع

[1] Császár, Á. (2002). Generalized topology, generalized continuity. Acta Mathematica Hungarica, 96, 351–357. https://doi.org/10.1023/A:1019713018007

[2] Császár, Á. (2004). Separation axioms for generalized topologies. Acta Mathematica Hungarica, 104, 63–69. https://doi.org/10.1023/B:AMHU.0000034362.97008.c6

[3] Tyagi, B. K., & Chauhan, H. V. S. (2018). On some separation axioms in generalized topological spaces. Questions and Answers in General Topology, 36(1), 9–29. https://doi.org/10.82665/qagt.36.1_9

[4] Toumi, F. A., & Altoumi, N. A. (2025). Some approximation spaces via supra topology. Al-Mukhtar Journal of Basic Sciences, 23(1), 10–21. https://doi.org/10.54172/31ke1w34

[5] Yang, L., & Xu, L. (2011). Topological properties of generalized approximation spaces. Information Sciences, 181(17), 3570–3580. https://doi.org/10.1016/j.ins.2011.04.020

[6] Wu, H., & Liu, G. (2020). The relationships between topologies and generalized rough sets. International Journal of Approximate Reasoning, 119, 313–324. https://doi.org/10.1016/j.ijar.2020.01.011

[7] Al-shami, T. M., & Alshammari, I. (2023). Rough sets models inspired by supra-topology structures. Artificial Intelligence Review, 56(7), 6855–6883. https://doi.org/10.1007/s10462-022-10346-7

[8] Sutha Devi, V., & Eswari, K. (2023). G-Supra and G-Infra space. Ratio Mathematica, 48, 528–543. https://doi.org/10.23755/rm.v48i0.1353

[9] Fathi, F. I., Arif, N. E., & Abdalbaqi, L. S. (2022). Some result on supra separation axioms via graph theory. Tikrit Journal of Pure Science, 27(1), 115–121. https://doi.org/10.25130/tjps.v27i1.88

[10] Yao, Y. Y. (1998). Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators. Information Sciences, 111(1–4), 239–259. https://doi.org/10.1016/S0020-0255(98)10006-3

[11] Lashin, E. F., Kozae, A. M., Abo Khadra, A. A., & Medhat, T. (2005). Rough set theory for topological spaces. International Journal of Approximate Reasoning, 40(1–2), 35–43. https://doi.org/10.1016/j.ijar.2004.11.007

[12] Yu, H., & Zhan, W. (2014). On the topological properties of generalized rough sets. Information Sciences, 263, 141–152. https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.09.040

Compliance with ethical standards

Disclosure of conflict of interest

.The authors declare that they have no conflict of interest

Disclaimer/Publisher's Note: The statements, opinions, and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and not of **JLABW** and/or the editor(s). **JLABW** and/or the editor(s) disclaim responsibility for any injury to people or property resulting from any ideas, methods, instructions, or .products referred to in the content